

МОДЕЛЬ РОСТА НЕЙРОННОЙ СЕТИ

© Ф.А.Галимянов, Ф.М.Гафаров, Н.Р.Хуснутдинов

В статье представлена модель, описывающая динамическое образование нейронных сетей. Целью работы является моделирование процесса возникновения нейронной сети. Образование нейронной сети в нашей модели осуществляется путем соединения кончика аксона с телом нейрона. Все нейроны по своим формам, свойствам, и поведению абсолютно одинаковы. Положения нейронов фиксировано, и рост аксонов единственный способ образование сети. Предложенная модель применяется как для трехмерного, так и двухмерного случаев.

Ключевые слова: математическая модель, нейронная сеть, аксон, численный анализ

Математическая модель

Координаты центра нейрона располагаются в вершинах прямоугольника или куба (в зависимости размерности). Положение кончика аксона каждого нейрона описывается радиус-вектором $\vec{r}_i t$, и в начальный момент равно координате центра нейрона. Нейроны обладают свойством называемым активностью, которая подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\tau \frac{dS_i t}{dt} = -S_i t + f \left(\sum_{j=1}^N w_{ji} S_j t + S_i^{ext} t \right).$$

Здесь τ , $S_i t$ коэффициент затухания активности и сама активность i -го нейрона в момент времени t ; $f x = x\theta x$, где θx – ступенчатая функция, w_{ji} – веса, которые могут принимать три значения "1", "0" или "-1". Веса бывают положительными, отрицательными или же "нулевыми" и определяют тип связи между нейронами. Типы связей (веса) зависят от активности i -го нейрона, с которым соединился аксон j -го нейрона, если активность i -го нейрона больше чем пороговая S_{nop} (величина безразмерная), то связь отрицательная и наоборот [1], [2]:

$$w_{i,j} = \begin{cases} -1, & \text{при } S_i t > 0,51 \\ 1, & \text{при } S_i t \leq 0,51 \end{cases}$$

Вначале все связи (веса) считаются "нулевыми", то есть связи считаются не появившимися и остаются нулевыми до образования связи. Связь появляется, если конец аксона j -го нейрона приблизится к центру i -го нейрона на расстояние, которое меньше чем половина радиуса аксона. $S_i^{ext} t$ – сигнал входящий в систему извне.

В зависимости от активности $S_i t$ нейрон испускает в межклеточное пространство вещество, которое влияет на аксоны нейронов находя-

щихся в системе, а также на собственный аксон. Аксон не растет, в случае если активность его собственного нейрона больше порогового значения S_{nop} . Связь не может появиться у нейрона с его же аксоном то есть если $i = j$, то всегда $w_{i,j} = 0$.

Воспользуемся стандартным уравнением теплопроводности для описания распространения вещества в среде. Решая уравнение:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} - D^2 \Delta c_i - kc_i = J_i \vec{r}_j, t,$$

можно найти концентрацию вещества выделившегося из i -го нейрона в момент времени t .

Здесь k – коэффициенты деградации. Решение этого уравнения описывает концентрацию вещества в точке \vec{r}_j в момент времени t , и оно хорошо известно:

$$c_i \vec{r}_j - \vec{r}_i, t = \int G_d \vec{r}_j - \vec{r}_i, t c_i \vec{r}_i d\vec{r}_i + \int_0^t dt_k \int G_d \vec{r}_j - \vec{r}_i, t - t_k J_i \vec{r}_i, t_k d\vec{r}_i,$$

где $G_d \vec{r}_j - \vec{r}_i, t$ – функция Грина:

$$G_d \vec{r}_j - \vec{r}_i, t = \frac{1}{4\pi t D^2} \exp \left(-kt - \frac{\vec{r}^2}{4tD^2} \right).$$

Здесь D^2 – коэффициент теплопроводности, а плотность тока $J_i \vec{r}_j, t$,

$$J_i \vec{r}_j, t = a \delta^d \vec{r}_j - \vec{r}_i S_i t,$$

выражается через активность $S_i t$.

Решая эти уравнения совместно, получаем уравнение для полной концентрации:

$$c_i \vec{r}_j - \vec{r}_i, t = a \int_0^t dt_k G_d \vec{r}_j - \vec{r}_i, t - t_k S_i t_k.$$

Уравнение движения аксона j -го нейрона, описываемого радиус – вектором \vec{g}_i , записывается в следующем виде:

$$\frac{d\bar{g}_i}{dt} = \lambda F S_i \sum_{n=1}^N \nabla c_n \bar{g}_i - \bar{r}_n, t .$$

Здесь λ – коэффициент, описывающий чувствительность и подвижность аксона, $F S = \theta S_{пор} - S$, где $S_{пор}$ – это пороговое значение активности.

Численный анализ

Далее мы численно решаем уравнения движения аксонов и вычисляем активности. Для решения дифференциального уравнения используем метод Эйлера, программной средой является язык C++, погрешность вычисления допускается при шаге итераций $\Delta t = 20$ сек. и менее.

Параметры, используемые при решении уравнений, имеют следующие значения:

$d = 3 \cdot 10^{-3}$ см – диаметр сомы нейрона;

$r = 0,5$ мм – расстояния между нейронами;

$S_{пор} = 0,51$ – пороговое значение активности;

$k = 10^{-3}$ 1/сек – коэффициенты деградации;

$D^2 = 6 \cdot 10^{-7}$ см² сек – коэффициент теплопроводности [3];

$\lambda = 4 \cdot 10^{-6}$ см²/сек·нМ – коэффициент, описывающий чувствительность и подвижность аксона.

Далее задаем последовательность и время действия внешних сигналов. Девятый нейрон получает внешний сигнал с нулевой секунды и до 800 секунды; первый нейрон с 800 до 1200; восьмой с 1200 до 3500; на первый нейрон вновь начинает поступать внешний сигнал с 3500 секунды и до конца эксперимента, т.е. до 40000 секунды. См. Рис.1.

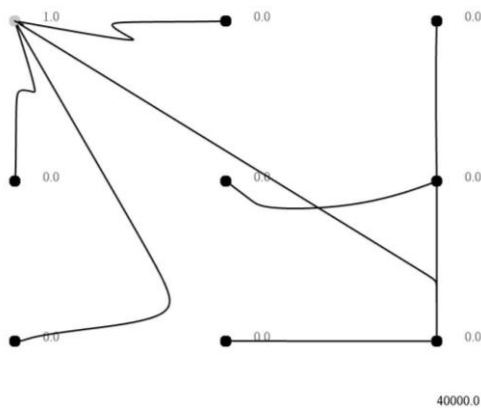


Рис.1. Рост аксонов на плоскости. Кружками обозначены месторасположения нейронов. В нижнем правом углу показано время в секундах. Рядом с нейронами указаны их активности в данный момент времени

В трехмерного случае расчет производим аналогичным образом, меняется лишь число нейронов и время подачи внешнего сигнала на них. На первый нейрон сигнал подается с началом отсчета и действует до 2000 секунды; на восьмой с 2000 по 4000; на третий с 4000 по 6000; на семнадцатый с 6000 по 9000; на одиннадцатый с 9000 до конца эксперимента, т.е. 40000 секунды. См. Рис.2.

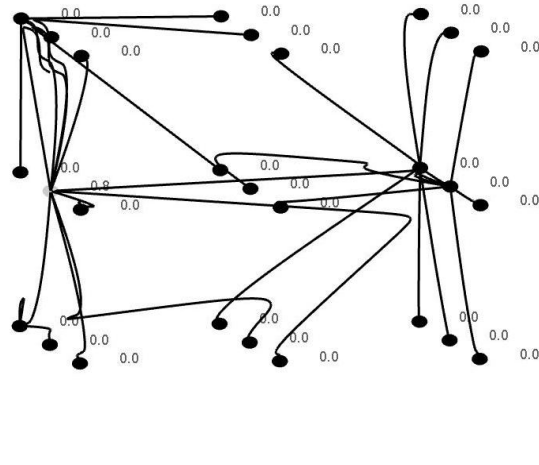


Рис.2. Рост аксонов в пространстве. Сферами обозначены месторасположения нейронов. В нижнем правом углу показано время в секундах. Рядом с нейронами указаны их активности в данный момент времени

Суммируем результаты работы. В статье предложена реальная модель роста нейронной сети, основанная на уравнении диффузии вещества, управляющего ростом аксона. Используя экспериментальные значения параметров нейронной сети, показано, что картина роста сети соответствует наблюдаемым данным. Наблюдаемая топология растущей нейронной сети управляется активностями нейронов.

1. Dickson B.J. Molecular Mechanisms of Axon Guidance // Science. – 2002. – 298. – P.1959-1964.
2. Gafarov F. Self-wiring in neural nets of point-like cortical neurons fails to reproduce cytoarchitectural differences // J. Int. Neurosc. 2006. – 5. – P.159-169.
3. Gomez T.M. and Zheng J.Q. The molecular basis for calcium-dependent axon pathfinding // Nature Neurosci. – 2006. – 7. – P.115-125.

THE MODEL OF DYNAMIC GROWTH OF NEURON NETWORK

F.A.Galimyanov, F.M.Gafarov, N.R.Khusnutdinov

Here we present the model of dynamic growth of the neuron network. The network is created by connection of growth cone with neuron's soma. All neurons are equivalent to each other. The neurons have fixed positions, and the growth of axons is the only way of creation of the network.

We use the model for two and three dimensional cases with neuron's soma as a sphere.

Key words: mathematical model, neuron network, axon, numerical analysis

* * * * *

Галимянов Фанис Анисович – аспирант кафедры информационных технологий в образовании

Гафаров Фаиль Мубараквич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

Хуснутдинов Наиль Рустамович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационных технологий в образовании Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

E-mail: ff@tggpu.ru