А.Ш.Хисматуллин

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ В – ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть E_2^{++} – первый квадрант координатной плоскости Оху, D^{++} – область в E_2^{++}, ограниченная отрезками ОА и ОВ соответственно осей Ох и Оу и кривой Γ^{++}, образующей в точках пересечения с осями координат прямой угол, $\tilde{D}^{++} = D^{++} \cup \Gamma^{++} \cup OB$.

В области D^{++} рассмотрим вырождающееся В – эллиптическое уравнение вида:

$$T_B(u)=B_k u+y^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \qquad (0.1)$$

где $B_k u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x}=x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор Бесселя, ?>1, k>0.

В первом параграфе изучаются свойства решений уравнения (0.1) в области, принцип Экстремума для решения уравнения (0.1). Во втором параграфе дается постановка краевых задач для уравнения (0.1) и доказывается единственность их решения. В третьем параграфе строятся потенциалы и изучаются их свойства. В четвертом параграфе краевые задачи для уравнения (0.1) сводятся к интегральным уравнениям и доказывается существование их решения.

§1. Свойства решений уравнения

Известно [1], что уравнение (0.1) имеет фундаментальное решение с особенностью в точке (x_0,y_0), вида:

$$\varepsilon(x,y,x_0,y_0)=A(k)C_k\int_0^{\pi}\left[x^2+x_0^2-2xx_0\cos\varphi+\frac{(y^{1-\alpha}-y_0^{1-\alpha})^2}{(1-\alpha)^2}\right]^{-k/2}\sin^{k-1}\varphi\, d\varphi, \qquad (1.1)$$

где $C=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$.

И интегральное представление данного решения будет иметь вид:

$$u(x,y)=\int_{\Gamma^{++}}\left(\varepsilon(x,y,x_0,y_0)A[u]-uA[\varepsilon(x,y,x_0,y_0)]\right)x^k y^{\alpha}d\Gamma^{++}. \qquad (1.2)$$

Теорема 1. Существует четное по х решение уравнения (0.1) в области D^{++}, удовлетворяющее граничному условию:

$$u|_{y=0}=0. \qquad (1.3)$$

Теорема 2. Существует решение уравнения (0.1) в области D_ε^{++}, удовлетворяющее при $\rho \to \infty$ условию

$$u = O\left(\rho^{-k}\right). \tag{1.4}$$

Теорема 3. Если четная по x функция u удовлетворяет условиям:

1). $u \in C^2\left(D^{++}\right) \cap C\left(\bar{D}^{++}\right)$,

2). $\lim\limits_{y \to 0} u = 0$,

3). $T_B(u)=0$

в D^+, то она принимает наибольшее положительное и наименьшее отрицательное значение на границе Γ^+, если она не равна нулю.

§2 . Краевые задачи и теоремы единственности

Внутренняя задача типа Дирихле. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^2\left(D^{++}\right) \cap C\left(\bar{D}^{++}\right), \tag{2.1}$$

$$T_B(u)=0,\ (x,y) \in D^{++}, \tag{2.2}$$

$$\lim_{y \to 0} u = 0, \tag{2.3}$$

$$u\big|_{\Gamma^{++}} = \varphi(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in \Gamma^{++}. \tag{2.4}$$

Теорема 4. Внутренняя задача типа Дирихле для уравнения (0.1) с граничными условиями (2.1) и (2.4) не может иметь более одного решения.

Внешняя задача типа Дирихле. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^2\left(D_\varepsilon^{++}\right) \cap C\left(\bar{D}^{++}\right), \tag{2.5}$$

$$T_B(u)=0,\ (x,y) \in D^{++}, \tag{2.6}$$

$$\lim_{y \to 0} u = 0, \tag{2.7}$$

$$u = o(1) \text{ при } r \to \infty, \tag{2.8}$$

$$u\big|_{\Gamma^{++}} = \psi(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in \Gamma^{++}, \tag{2.9}$$

где $r=\sqrt{x^2+\frac{1}{(1-\alpha)^2}\left(y^{1-\alpha}-y_0^{1-\alpha}\right)^2}$.

Теорема 5. Внешняя задача типа Дирихле для уравнения (0.1) с граничными условиями (2.5) и (2.9) не может иметь более одного решения.

Внутренняя задача типа Неймана. Найти четную по x функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^2\left(D^{++}\right) \cap C^1\left(\bar{D}^{++}\right), \tag{2.10}$$

$$T_B(u)=0,\ (x,y) \in D_\varepsilon^{++}, \tag{2.11}$$

$$\lim_{y\to 0} u = 0\,, \tag{2.12}$$

$$A[u]\big|_{\Gamma^{++}} = f(\xi,\eta)\,,\ (\xi,\eta)\in\Gamma^{++}\,. \tag{2.13}$$

Теорема 6. Внутренняя задача типа Неймана для уравнения (0.1) с граничными условиями (2.10) и (2.13) не может иметь более одного решения.

Внешняя задача типа Неймана. Найти четную по x функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\in C^2\left(D_e^{++}\right)\cap C\left(D_e^{++}\cup\Gamma^{++}\right), \tag{2.14}$$

$$T_B(u)=0\,,\ (x,y)\in D_e^{++}, \tag{2.15}$$

$$\lim_{y\to 0} u = 0\,, \tag{2.16}$$

$$u = o\left(r^{-k}\right),\ \text{при}\ r\to\infty, \tag{2.17}$$

$$A[u]\big|_{\Gamma^{++}} = g(\xi,\eta)\,,\ (\xi,\eta)\in\Gamma^{++}\,. \tag{2.18}$$

Теорема 7. Внешняя задача типа Неймана для уравнения (0.1) с граничными условиями (2.14) и (2.18) не может иметь более одного решения.

§3. Потенциалы типа простого и двойного слоев

С помощью фундаментального $\varepsilon(x,y;x_0,y_0)$ образуем интегральные операторы:

$$v(x,y) = \int_{\Gamma^{+}} \mu(\xi,\eta)\,\varepsilon(\xi,\eta,x,y)\,\xi^{k}\eta^{m}\,d\Gamma^{++}\,, \tag{3.1}$$

$$w(x,y) = \int_{\Gamma^{+}} \upsilon(\xi,\eta)\,A\left[\varepsilon(\xi,\eta,x,y)\right]\xi^{k}\eta^{m}\,d\Gamma^{++}\,, \tag{3.2}$$

где $A[u]=\cos(n,\xi)\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\eta^{2m}\cos(n,\eta)\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$ – конормальная производная.

Интегральные операторы $v(x,y)$ и $w(x,y)$ – представляют собой соответственно потенциалы типа простого и двойного слоев для уравнения (0.1).

Интегралом Гаусса будем называть потенциалом типа двойного слоя, плотность которого тождественно равна единице, т. е. интеграл вида: $w_0(x,y) = \int_{\Gamma^{++}} A\left[\varepsilon(\xi,\eta,x,y)\right]\xi^{k}\eta^{m}\,d\Gamma^{++}$.

Лемма 1. (Геллерстедт)

$$w_0(x,y) = \int_{\Gamma^{++}} A\left[\varepsilon(\xi,\eta,x,y)\right]\xi^{k}\eta^{m}\,d\Gamma^{++} = \begin{cases} -1, \text{если}\ (x,y)\in D^{++}, \\ -1/2, \text{если}\ (x,y)\in\Gamma^{++}, \\ 0, \text{если}\ (x,y)\notin\bar{D}^{++}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Теорема 8. Если $\upsilon(\xi,\eta)\in C\left(\Gamma^{++}\right)$ и $\lim_{\eta\to 0}\upsilon(\xi,\eta)=0$, Γ^{++} – кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для потенциала типа двойного слоя справедливы следующие предельные соотношения

$$w_i(x,y) = -\frac{1}{2}\upsilon(x_0,y_0) + \overline{w(x_0,y_0)}\ , \qquad (3.4)$$

$$w_e(x,y) = \frac{1}{2}\upsilon(x_0,y_0) + \overline{w(x_0,y_0)}\ , \qquad (3.5)$$

где $w_i(x,y)$ и $w_e(x,y)$ означают предельные значения потенциала в точке $(x_0,y_0)\in\Gamma^{++}$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$ соответственно изнутри и из вне Γ^{++}, а $\overline{w(x_0,y_0)}$ прямое значение потенциала $w(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Теорема 9. Если плотность $\mu(\xi,\eta)\in C(\Gamma^{++})$ и $\lim\limits_{\eta\to 0}\mu(\xi,\eta)=0$, Γ^{++} – кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для конормальной производной потенциала типа простого слоя справедливы следующие предельные соотношения:

$$A_{M_0}\left[v(x,y)\right]_i = \frac{1}{2}\mu(x_0,y_0) + \overline{A_{M_0}\left[v(x,y)\right]}\ , \qquad (3.6)$$

$$A_{M_0}\left[v(x,y)\right]_e = -\frac{1}{2}\mu(x_0,y_0) + \overline{A_{M_0}\left[v(x,y)\right]}\ , \qquad (3.7)$$

где $A_{M_0}\left[v(x,y)\right]_i$ и $A_{M_0}\left[v(x,y)\right]_e$ означают предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя в точке $(x_0,y_0)\in\Gamma^{++}$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$ соответственно изнутри и из вне Γ^{++}, а $\overline{A_{M_0}\left[v(x,y)\right]}$ прямое значение конормальной производной потенциала типа простого слоя в точке (x_0,y_0).

§4. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям

Решение внутренней задачи типа Дирихле ищем в виде потенциала типа двойного слоя:

$$u(x,y) = w(x,y)\ . \qquad (4.1)$$

Ясно, что функция (4.1) удовлетворяет условиям внутренней задачи типа Дирихле: (2.1) – (2.3).

Неизвестную плоскость $\upsilon(\xi,\eta)$ найдем из требования, чтобы функция (4.1) удовлетворяла граничному условию (2.4). Подставляя ее в это условие, с учетом формулы скачка (3.4) получаем

$$\upsilon(x,y) - 2\int\limits_{\Gamma^{++}} \upsilon(\xi,\eta)\,A_P\left[\varepsilon(\xi,\eta,x,y)\right]\xi^k\eta^m d\Gamma^{++} = -2\varphi(x,y)\ . \qquad (4.2)$$

Решение внешней задачи типа Дирихле ищем в виде потенциала типа двойного слоя:

$$u(x,y) = w(x,y)\ . \qquad (4.3)$$

Ясно, что функция (4.3) удовлетворяет условиям внешней задачи типа Дирихле: (2.5) – (2.8).

Неизвестную плоскость $\upsilon(\xi,\eta)$ найдем из требования, чтобы функция (4.3) удовлетворяла граничному условию (2.9). Подставляя ее в это условие, с учетом формулы скачка (3.5) получаем

$$\upsilon(x,y)+2\int\limits_{\Gamma^{++}}\upsilon(\xi,\eta)A_P\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^k\eta^m d\Gamma^{++}=2\psi(x,y)\ . \tag{4.4}$$

Решение внутренней задачи типа Неймана ищем в виде потенциала типа простого слоя:

$$u(x,y)=v(x,y)\ . \tag{4.5}$$

Ясно, что функция (4.5) удовлетворяет условиям внутренней задачи типа Неймана: (2.10) – (2.12).

Неизвестную плоскость $\mu(\xi,\eta)$ найдем из требования, чтобы функция (4.5) удовлетворяла граничному условию (2.13). Подставляя ее в граничное условие (2.13), получаем

$$\mu(x,y)+2\int\limits_{\Gamma^{+}}\mu(\xi,\eta)A_M\left[\varepsilon(\xi,\eta,x,y)\right]\xi^k\eta^m d\Gamma^{++}=2f\ (x,y)\ . \tag{4.6}$$

Решение внешней задачи типа Неймана ищем в виде потенциала типа простого слоя:

$$u(x,y)=v(x,y)\ . \tag{4.7}$$

Ясно, что функция (4.7) удовлетворяет условиям внешней задачи типа Неймана: (2.14) – (2.17).

Неизвестную плоскость $\mu(\xi,\eta)$ найдем из требования, чтобы функция (4.7) удовлетворяла граничному условию (2.18). Подставляя ее в граничное условие (2.18), получаем

$$\mu(x,y)-2\int\limits_{\Gamma^{++}}\mu(\xi,\eta)A_M\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^k\eta^m d\Gamma^{++}=-2g(x,y)\ . \tag{4.8}$$

Отметим следующие свойства интегральных уравнений (4.2), (4.4), (4.6), (4.8):

1) Из формулы (1.1) следует, что эти уравнения являются интегральными уравнениями со слабой особенностью.

2) Ядра $A_P\left[\varepsilon(\xi,\eta,x,y)\right]$ и $A_M\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]$ получаются одно из другого перестановкой точек $P(\xi,\eta)$ и $M(x,y)$.

3) Так как эти ядра вещественны, то они сопряженные.

Отсюда следует, что уравнения (4.2) и (4.8), (4.4) и (4.6) – попарно сопряженные.

Докажем, что интегральные уравнения (4.2) и (4.8), соответствующие внутренней задаче типа Дирихле и внешней задаче типа Неймана, разрешимы единственным образом при любых непрерывных функциях $\varphi(x,y)$ и $g(x,y)$.

С этой целью рассмотрим однородное интегральное уравнение внешней задачи типа Неймана.

$$\mu(x,y)-2\int\limits_{\Gamma^{++}}\mu(\xi,\eta)A_M\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^k\eta^m d\Gamma^{++}=0\ . \tag{4.9}$$

Пусть $\mu_0(x,y)$ – ненулевое решение этого уравнения.

Тогда функция

$$u_0(x,y)=\int_{\Gamma^{++}}\mu_0(\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\xi^k\eta^m d\Gamma^{++}$$

удовлетворяет условиям (2.14) – (2.18), в том числе и граничному условию $A[u_0]|_{\Gamma^{++}}=0$ или:

$$A_M[u_0]|_e=-\frac{1}{2}\mu_0(x,y)+\int_{\Gamma^{++}}\mu_0(\xi,\eta)A_M[\varepsilon(\xi,\eta,x,y)]\xi^k\eta^m d\Gamma^{++}=0 \quad (4.10)$$

В силу теоремы единственности внешней задачи типа Неймана

$$u_0(x,y)=0\ ,\ (x,y)\in D_e^{++}.$$

Так как потенциал типа простого слоя есть непрерывная функция, в E_e^{++}, то $u_0|_{\Gamma^{++}}=0$.

Рассмотрим теперь функцию

$$u_0(x,y)=\int_{\Gamma^{++}}\mu_0(\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\xi^k\eta^m d\Gamma^{++}$$

в области D^{++}. Она в этой области удовлетворяет условиям (3.1) – (3.4), в том числе и $u_0|_{\Gamma^{++}}=0$.

В силу теоремы единственности внутренней задачи Дирихле

$$u_0(x,y)=0\ ,\ (x,y)\in \bar{D}^{++}.$$

Тогда

$$A_M[u_0]|_i=\frac{1}{2}\mu_0(x,y)+\int_{\Gamma^{++}}\mu_0(\xi,\eta)A_M[\varepsilon(\xi,\eta,x,y)]\xi^k\eta^m d\Gamma^{++}=0\cdot \quad (4.11)$$

Вычитая из (4.11) равенство (4.10), получаем: $\mu_0(x,y)=0$.

Таким образом, однородное интегральное уравнение (4.9) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы ,Фредгольма, интегральное уравнение внешней задачи типа Неймана однозначно разрешимо для любой непрерывной функции $g(x,y)$. По известной теореме Фредгольма значение $\lambda=2$ правильное для ядра $A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]$, является правильным и для сопряженного ядра $A_P[\varepsilon(\xi,\eta,x,y)]$.

Отсюда следует, что интегральное уравнение (4.2) внутренней задачи типа Дирихле однозначно разрешимо для непрерывной функции $\varphi(x,y)$.

Из разрешимости интегральных уравнений внутренней задачи типа Дирихле и внешней задачи типа Неймана следует, что разрешимы и сами задачи.

Это доказывает справедливость теоремы о разрешимости внутренней задачи типа Дирихле и внешней задачи типа Неймана:

Теорема 10. Если Γ^{++} – кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $g(x,y)\in C(\Gamma^{++})$ разрешима внешняя задача типа Неймана и ее решение может быть представлено в виде потенциала типа простого слоя.

Теорема 11. Если Γ^{++} – кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $\varphi(x,y) \in C(\Gamma^{++})$ разрешима внутренняя задача типа Дирихле и это решение может быть представлено в виде потенциала типа двойного слоя.

Теорема 12. Если Γ^{++} – кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, функция $f(x,y) \in C(\Gamma^{++})$ и удовлетворяет условию $\int\limits_{\Gamma^{++}} f(\xi,\eta)\xi^k \eta^m d\Gamma^{++} = 0$ (условие разрешимости интегрального уравнения), то разрешима внутренняя задача типа Неймана и ее решение может быть представлено в виде потенциала типа простого слоя.

Теорема 13. Если Γ^{++} – кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $\psi(x,y) \in C(\Gamma^{++})$ разрешима внешняя задача типа Дирихле и это решение может быть представлено в виде.

$$\upsilon(x,y) + 2\int\limits_{\Gamma^{++}} \upsilon(\xi,\eta) A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^k \eta^m d\Gamma^{++} + \frac{1}{r^{3k}}\int\limits_{\Gamma^{++}} \upsilon(\xi,\eta)\xi^k \eta^m d\Gamma^{++}$$

Доказательство этих теорем проводится аналогично доказательству проведенному в [2].

Литература

[1] Хисматуллин А.Ш. Интегральное представление решения одного вырождающегося B-эллиптического уравнения// Математическое моделирование и краевые задачи. Труды всероссийской научной конференции. Ч. 3. Самара. 2004.

[2] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М. 1977.