УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО В-ЭЛЛИПТИКО-В-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© Р.М.Сафина

В работе методом спектральных разложений на основании свойства полноты системы собственных функций одномерной спектральной задачи исследован вопрос о корректности постановки задачи Дирихле с осевой симметрией для уравнения смешанного В-эллиптико-В-гиперболического типа в полуцилиндре.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Дирихле, оператор Бесселя, спектральный метод.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L_B u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + + \operatorname{sgn} z\, |z|^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a^2 u = 0 \tag{1}$$

в полуцилиндре $D = \left\{ (x,y,z) \middle| \, x^2 + y^2 < 1, x > 0, -\alpha < z < \beta \right\}$, где $a > 0, k > 0,\ 0 < m < 1,\quad \alpha > 0, \beta > 0$ – заданные действительные числа.

Исследование вопроса о корректности краевых задач для уравнения (1) в полуцилиндре D проще всего проводить в цилиндрических координатах (ρ, φ, z). Уравнение (1) в цилиндрических координатах имеет вид

$$L_B u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{k+1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - -\frac{ktg\varphi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \operatorname{sgn} z\, |z|^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a^2 u = 0. \tag{2}$$

Чтобы сформулировать постановку задачи Дирихле для уравнения (2) с осевой симметрией, требуется симметричность решения по углу φ. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ в D и уравнение (2) упрощается и принимает вид

$$T_B u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{k+1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \operatorname{sgn} z\, |z|^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a^2 u = 0. \tag{3}$$

Задача Дирихле с осевой симметрией. Найти в области D функцию $u(\rho, z)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(\rho, z) \in C^2(D_+ \cup D_-) \cap C^1(D) \cap C(\overline{D}); \tag{4}$$

$$T_B u(\rho, z) \equiv 0,\ (\rho, z) \in D_+ \cup D_-; \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = 0,\ u\big|_{\rho=1} = 0,\ -\alpha < z < \beta; \tag{6}$$

$$u\big|_{z=-\alpha} = \varphi(\rho),\ u\big|_{z=\beta} = \psi(\rho), \quad \varphi(\rho), \psi(\rho) \in C_0^3[0,1]. \tag{7}$$

В работах Ф.И.Франкля [1; 2] впервые было обращено внимание на то, что ряд задач трансзвуковой динамики сводится к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа. В работе А.В.Бицадзе [3] была показана некорректность постановки задачи Дирихле для уравнения М.А.Лаврентьева $u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0$. Результат этой работы с необходимостью поставил вопрос поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. В дальнейшем задача Дирихле для уравнений смешанного типа изучалась многими авторами [4; 5; 6; 7; 8]. В этих работах единственность решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа доказана на основании принципа экстремума или методом интегральных тождеств, а существование – методом интегральных уравнений или разделения переменных. Е.И.Моисеев [9] предложил новый метод построения решения краевых задач для модельных уравнений смешанного типа в специальных областях, гиперболическая часть которой есть характеристический треугольник. Этот метод основан на теории рядов по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. В исследовании К.Б.Сабитова и А.Х.Сулеймановой [10] рассмотрена задача Дирихле для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа второго рода в прямоугольной области.

Вопрос о существовании и единственности решения краевых задач для уравнения смешанного В-эллиптико-В-гиперболического типа с характеристическим вырождением до последнего времени оставался открытым.

В данной работе методом разделения переменных на основании свойства полноты системы собственных функций одномерной спектральной задачи изучен вопрос о существовании и единственности решения задачи (4)-(7) при $0 < m < 1$.

2. Построение частных решений уравнения (3) в полуцилиндре D

Частные решения уравнения (3) ищем в виде произведения

$$u = R(\rho) Z(z), \tag{8}$$

удовлетворяющего граничным условиям (6). Подставляя данное произведение в уравнение (3) и граничные условия (6), получим

$$R'' Z(z) + \frac{k+1}{\rho} R' Z(z) + \\ + \operatorname{sgn} z |z|^m R Z'' - a^2 R Z = 0, \tag{9}$$

$$R'(0) Z(z) = 0, R(1) Z(z) = 0. \tag{10}$$

Деля равенство (9) на RZ и перенося второе слагаемое вправо, получим

$$\frac{R'' + \frac{k+1}{\rho} R'}{R} = -\frac{\operatorname{sgn} z |z|^m Z'' - a^2 Z}{Z}. \tag{11}$$

Приравнивая обе части равенства (11) постоянной $-\lambda^2$, приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$Z'' - \left(a^2 + \lambda^2\right) \operatorname{sgn} z |z|^{-m} Z = 0, \tag{12}$$

$$R'' + \frac{k+1}{\rho} R' + \lambda^2 R = 0. \tag{13}$$

Из равенств (10) имеем

$$R'(0) = 0, R(1) = 0. \tag{14}$$

Найдем решение спектральной задачи (13), (14). Умножая уравнение (13) на ρ^2, имеем

$$\rho^2 R'' + (k+1) \rho R' + \lambda^2 \rho^2 R = 0. \tag{15}$$

В этом уравнении произведем замену переменной ρ и неизвестной функции R по формулам

$$R = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{-\frac{k}{2}} v, \rho = \frac{r}{\lambda}. \tag{16}$$

В результате имеем уравнение Бесселя

$$r^2 \frac{d^2 v}{dr^2} + r \frac{dv}{dr} + \left(r^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right) v = 0. \tag{17}$$

Известно [11], что общее решение уравнения (17) имеет вид

$$v(r) = C_1 J_{\frac{k}{2}}(r) + C_2 Y_{\frac{k}{2}}(r), \tag{18}$$

где $J_{\frac{k}{2}}(r)$ и $Y_{\frac{k}{2}}(r)$ – функции Бесселя первого и второго родов соответственно, C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Переходя к переменным ρ и R по формулам $r = \lambda\rho$, $v = \rho^{\frac{k}{2}} R$, которые определяются из (16), получим общее решение уравнения (15). Оно имеет вид

$$R = C_1 \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda\rho) + C_2 \rho^{-\frac{k}{2}} Y_{\frac{k}{2}}(\lambda\rho), \tag{19}$$

где λ, C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Их найдем из требования, чтобы решение (19) удовлетворяло граничным условиям (14).

По известным формулам дифференцирования функции Бесселя имеем

$$R' = -C_1 \lambda \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k+2}{2}}(\lambda\rho) - C_2 \lambda \rho^{-\frac{k}{2}} Y_{\frac{k+2}{2}}(\lambda\rho). \tag{20}$$

Из формулы разложения функции Бесселя в степенной ряд следует, что при $\rho = 0$ первое слагаемое в (20) обращается в нуль, а второе слагаемое – в ∞. Поэтому решение (19) удовлетворяет первому граничному условию из (14), если $C_2 = 0$. Также здесь положим $C_1 = 1$, так как собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. В результате имеем

$$R(\rho) = \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda\rho). \tag{21}$$

Потребуем теперь чтобы решение (21) удовлетворяло второму граничному условию из (14)

$$J_{\frac{k}{2}}(\lambda) = 0.$$

По известным теоремам [11] это уравнение имеет бесконечное число простых вещественных корней $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, которые определяют собственные значения спектральной задачи (13), (14). Полагая в (21) $\lambda = \lambda_n$, получим соответствующие собственные функции

$$R_n = \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n \rho), \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{22}$$

В работе Г.Н.Ватсона [11] отмечается, что система функций $\left\{ J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n \rho) \right\}$ ортогональна с весом ρ в промежутке $[0,1]$. Поэтому система собственных функций (22) ортогональна с весом ρ^{k+1} в этом промежутке, т.е.

$$\int_0^1 \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}\left(\lambda_{n_1}\rho\right) \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}\left(\lambda_{n_2}\rho\right) \rho^{k+1} d\rho = \\ = \int_0^1 \rho J_{\frac{k}{2}}\left(\lambda_{n_1}\rho\right) J_{\frac{k}{2}}\left(\lambda_{n_2}\rho\right) d\rho = 0. \qquad (23)$$

Также исследователь указал на то, что система функций $\left\{ J_{\frac{k}{2}}\left(\lambda_n \rho\right) \right\}$ полна в пространстве $L_2\left(\left[0,1\right],\rho\right)$ и для них имеет место соотношение

$$\int_0^1 \rho J_{\frac{k}{2}}^2\left(\lambda_n\rho\right) d\rho = \frac{1}{2} J_{\frac{k+2}{2}}^2\left(\lambda_n\right).$$

Отсюда следует, что система собственных функций (22) полна в пространстве $L_2\left(\left[0,1\right],\rho^{k+1}\right)$ и для функций этой системы имеет место соотношение

$$\int_0^1 \rho^{-k} J_{\frac{k}{2}}^2\left(\lambda_n\rho\right) \rho^{k+1} d\rho = \int_0^1 \rho J_{\frac{k}{2}}\left(\lambda_n\rho\right) d\rho = \\ = \frac{1}{2} J_{\frac{k+2}{2}}^2\left(\lambda_n\right). \qquad (24)$$

Поэтому любая функция $f\left(\rho\right)$ из $L_2\left(\left[0,1\right],\rho^{k+1}\right)$ может быть разложена в ряд Фурье – Бесселя по системе собственных функций (22), т.е.

$$f\left(\rho\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}\left(\lambda_n\rho\right). \qquad (25)$$

Коэффициенты определяются по формулам

$$\sigma_n = \frac{2}{J_{\frac{k+2}{2}}^2\left(\lambda_n\right)} \int_0^1 f\left(\rho\right) J_{\frac{k}{2}}\left(\lambda_n\rho\right) \rho^{\frac{k+2}{2}} d\rho = f_n. \qquad (26)$$

На основании формул дифференцирования цилиндрических функций коэффициенты σ_n представим в виде

$$\sigma_n = \frac{2}{\lambda_n J_{\frac{k+2}{2}}^2\left(\lambda_n\right)} \int_0^1 f\left(\rho\right) \frac{d}{d\rho}\left(\rho^{\frac{k}{2}+1} J_{\frac{k+2}{2}}\left(\lambda_n\rho\right)\right) d\rho. \qquad (27)$$

Интегрируя по частям интеграл (27), получим

$$\sigma_n = \frac{2}{\lambda_n J_{\frac{k+2}{2}}^2\left(\lambda_n\right)} \left[f\left(1\right) J_{\frac{k+2}{2}}\left(\lambda_n\right) - \int_0^1 f'\left(\rho\right) \rho^{\frac{k+2}{2}} J_{\frac{k+2}{2}}\left(\lambda_n\rho\right) d\rho \right] =$$

$$= \frac{2}{\lambda_n J_{\frac{k+2}{2}}^2\left(\lambda_n\right)} \left\{ f\left(1\right) J_{\frac{k+2}{2}}\left(\lambda_n\right) - \frac{1}{\lambda_n}\left[f'\left(1\right) J_{\frac{k+4}{2}}\left(\lambda_n\right) - \int_0^1 f''\left(\rho\right) \rho^{\frac{k+4}{2}} J_{\frac{k+4}{2}}\left(\lambda_n\rho\right) d\rho \right]\right\} = \qquad (28)$$

$$= \frac{2}{\lambda_n J_{\frac{k+2}{2}}^2\left(\lambda_n\right)} \left\{ f\left(1\right) J_{\frac{k+2}{2}}\left(\lambda_n\right) - \frac{1}{\lambda_n}\left[f'\left(1\right) J_{\frac{k+4}{2}}\left(\lambda_n\right) - \frac{1}{\lambda_n}\left(f''\left(1\right) J_{\frac{k+6}{2}}\left(\lambda_n\right) - \int_0^1 f'''\left(\rho\right) \rho^{\frac{k+6}{2}} J_{\frac{k+6}{2}}\left(\lambda_n\rho\right) d\rho \right)\right]\right\}$$

Обозначим через $C_0^3\left[0,1\right]$ множество функций $f\left(\rho\right)$ из класса $C^3\left[0,1\right]$, удовлетворяющих условиям

$$f'\left(0\right) = 0, f\left(1\right) = 0, f'\left(1\right) = 0, f''\left(1\right) = 0.$$

Если $f\left(\rho\right) \in C_0^3\left[0,1\right]$, то коэффициенты разложения (25) могут быть определены по формулам

$$\sigma_n = \frac{2}{\lambda_n^3 J_{\frac{k+2}{2}}^2\left(\lambda_n\right)} \times \\ \times \int_0^1 f'''\left(\rho\right) \rho^{\frac{k+6}{2}} J_{\frac{k+6}{2}}\left(\lambda_n\rho\right) d\rho = \frac{f_n'''}{\lambda_n^3}. \qquad (29)$$

Полагая в (12) $\lambda^2 = \lambda_n^2$, получим

$$Z_n'' - \left(a^2 + \lambda_n^2\right) \operatorname{sgn} z \left|z\right|^{-m} Z_n = 0.$$

Это уравнение при $z > 0$ имеет вид

$$Z_n'' - \left(a^2 + \lambda_n^2\right) z^{-m} Z_n = 0, \qquad (30)$$

а при $z < 0$ – вид

$$Z_n'' + \left(a^2 + \lambda_n^2\right)\left(-z\right)^{-m} Z_n = 0. \qquad (31)$$

К.Б.Сабитов отмечал [12], что уравнения (30) и (31) с помощью замены переменных по формулам

$$Z_n = \xi^{\frac{1}{2-m}} \upsilon\left(\xi\right), \xi = \frac{2\sqrt{a^2 + \lambda_n^2}}{2-m} z^{\frac{2-m}{2}}; \qquad (32)$$

$$Z_n = \xi^{\frac{1}{2-m}} \omega\left(\xi\right), \xi = \frac{2\sqrt{a^2 + \lambda_n^2}}{2-m} (-z)^{\frac{2-m}{2}} \qquad (33)$$

приводятся соответственно к уравнениям

$$\xi^2 \upsilon'' + \xi \upsilon' - \left(\xi^2 + \frac{1}{\left(2-m\right)^2} \right) \upsilon = 0, \qquad (34)$$

$$\xi^2\omega'' + \xi\omega' + \left(\xi^2 - \frac{1}{(2-m)^2}\right)\omega = 0 . \qquad (35)$$

Также известно [11], что общее решение уравнений (34) и (35) определяются соответственно по формулам

$$\upsilon(\xi) = C_1 I_{\frac{1}{2-m}}(\xi) + C_2 K_{\frac{1}{2-m}}(\xi),$$

$$\omega(\xi) = C_3 J_{\frac{1}{2-m}}(\xi) + C_4 Y_{\frac{1}{2-m}}(\xi),$$

где $I_{\frac{1}{2-m}}(\xi)$ и $K_{\frac{1}{2-m}}(\xi)$ – модифицированные функции Бесселя соответственно первого и третьего родов порядка $\frac{1}{2-m}$, $J_{\frac{1}{2-m}}(\xi)$ и $Y_{\frac{1}{2-m}}(\xi)$ – функции Бесселя соответственно первого и второго родов порядка $\frac{1}{2-m}$, C_j, $j = 1,2,3,4$ – произвольные постоянные.

Переходя к переменным z и Z_n по формулам (32), (33), получим общее решения уравнений (30) и (31) соответственно

$$Z_n^+ = a_n\sqrt{z} I_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n z^q\right) + b_n\sqrt{z} K_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n z^q\right), z > 0 , \qquad (36)$$

$$\begin{aligned} Z_n^- &= c_n\sqrt{-z} J_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n(-z)^q\right) + \\ &+ d_n\sqrt{-z} Y_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n(-z)^q\right),\ z < 0, \end{aligned} \qquad (37)$$

где $p_n = \frac{2\sqrt{a^2+\lambda_n^2}}{2-m}$, $q = \frac{2-m}{2}$; a_n, b_n, c_n и d_n – произвольные постоянные.

Таким образом, система частных решений уравнения (3) при $0 < m < 1$, на множестве $D_+ \cup D_-$, удовлетворяющих условиям (4)-(6), определяется по формулам

$$u_n(\rho, z) = R_n(\rho) Z_n(z),\ n = 1,2,3,..., \qquad (38)$$

где $R_n(\rho)$ заданы равенствами (22), а $Z_n(z)$ определены по формулам (36) и (37)

$$Z_n(z) = \begin{cases} Z_n^+(z) = a_n Z_{1n}^+(z) + b_n Z_{2n}^+(z),\ z > 0; \\ Z_n^-(z) = c_n Z_{1n}^-(z) + d_n Z_{2n}^-(z),\ z < 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} Z_{1n}^+(z) &= \sqrt{z} I_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n z^q\right), \\ Z_{2n}^+(z) &= \sqrt{z} K_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n z^q\right), \\ Z_{1n}^-(z) &= \sqrt{-z} J_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n(-z)^q\right), \\ Z_{2n}^-(z) &= \sqrt{-z} Y_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n(-z)^q\right). \end{aligned} \qquad (39)$$

3. Единственность и существование решения задачи (4)-(7) при $0 < m < 1$

Решение задачи Дирихле ищем в виде

$$u(\rho, z) = \begin{cases} u^+(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n Z_{1n}^+(z) + b_n Z_{2n}^+(z)\right)\rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n \rho), \\ u^-(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n Z_{1n}^-(z) + d_n Z_{2n}^-(z)\right)\rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n \rho), \end{cases} \qquad (40)$$

где a_n, b_n, c_n и d_n – пока неопределенные постоянные. Их найдем из требования, чтобы функция $u(\rho, z)$, определяемая рядами (40), удовлетворяла условиям (4) и (7).

Для этого сначала исследуем поведение функций $Z_{in}^{\pm}$, $i = 1,2$ и их производных первого порядка при $z \to 0$.

Используя формулы дифференцирования цилиндрических функций, получим

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{1n}^+}{dz} &= \sqrt{a^2+\lambda_n^2}\, z^{\frac{1-m}{2}} I_{\frac{m-1}{2-m}}\left(p_n z^q\right), \\ \frac{dZ_{2n}^+}{dz} &= -\sqrt{a^2+\lambda_n^2}\, z^{\frac{1-m}{2}} K_{\frac{m-1}{2-m}}\left(p_n z^q\right), \end{aligned} \qquad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{1n}^-}{dz} &= -\sqrt{a^2+\lambda_n^2}\,(-z)^{\frac{1-m}{2}} J_{\frac{m-1}{2-m}}\left(p_n(-z)^q\right), \\ \frac{dZ_{2n}^-}{dz} &= -\sqrt{a^2+\lambda_n^2}\,(-z)^{\frac{1-m}{2}} Y_{\frac{m-1}{2-m}}\left(p_n(-z)^q\right). \end{aligned} \qquad (42)$$

С помощью формул асимптотического поведения цилиндрических функций при $0 < m < 1$ и $z \to 0$ имеем

$$\begin{aligned} Z_{1n}^+(z) &\approx \frac{(p_n/2)^{\frac{1}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{3-m}{2-m}\right)} z, \\ Z_{1n}^-(z) &\approx \frac{(p_n/2)^{\frac{1}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{3-m}{2-m}\right)}(-z), \end{aligned} \qquad (43)$$

$$Z_{2n}^+(z) \approx \frac{(2/p_n)^{\frac{1}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2-m}\right)}, Z_{2n}^- \approx \frac{(2/p_n)^{\frac{1}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2-m}\right)}, \qquad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{1n}^+(z)}{dz} &\approx \frac{\sqrt{a^2+\lambda_n^2}\,(2/p_n)^{\frac{1-m}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2-m}\right)}, \\ \frac{dZ_{1n}^-(z)}{dz} &\approx -\frac{\sqrt{a^2+\lambda_n^2}\,(2/p_n)^{\frac{1-m}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2-m}\right)}, \end{aligned} \qquad (45)$$

$$\frac{dZ_{2n}^{+}(z)}{dz} \approx -\sqrt{a^2+\lambda_n^2}\,\frac{(p_n/2)^{\frac{1-m}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{3-2m}{2-m}\right)} z^{1-m},$$
$$\frac{dZ_{2n}^{-}(z)}{dz} \approx -\sqrt{a^2+\lambda_n^2}\,\frac{(p_n/2)^{\frac{1-m}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{3-2m}{2-m}\right)} (-z)^{1-m}. \qquad (46)$$

С учетом условия (4) подберем постоянные a_n, b_n, c_n и d_n так, чтобы выполнялись следующие условия сопряжения

$$u^{+}(\rho,0+0)=u^{-}(\rho,0-0),$$
$$\frac{\partial u^{+}(\rho,0+0)}{\partial z}=\frac{\partial u^{-}(\rho,0-0)}{\partial z}. \qquad (47)$$

В силу соотношений (43)-(46) получим

$$u^{+}(\rho,0+0)=\lim_{z\to 0+0} u^{+}(\rho,z)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{(2/p_n)^{\frac{1}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2-m}\right)}\rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n\rho),$$
$$u^{-}(\rho,0-0)=\lim_{z\to 0-0} u^{-}(\rho,z)= \qquad (48)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{(2/p_n)^{\frac{1}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2-m}\right)}\rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n\rho),$$

$$\frac{\partial u^{+}(\rho,0+0)}{\partial z}=\lim_{z\to 0+0}\frac{\partial u^{+}(\rho,z)}{\partial z}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{a^2+\lambda_n^2}\,(2/p_n)^{\frac{1-m}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2-m}\right)}\rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n\rho),$$
$$\frac{\partial u^{-}(\rho,0-0)}{\partial z}=\lim_{z\to 0-0}\frac{\partial u^{-}(\rho,z)}{\partial z}= \qquad (49)$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sqrt{a^2+\lambda_n^2}\,(2/p_n)^{\frac{1-m}{2-m}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2-m}\right)}\rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n\rho).$$

Из предельных соотношений (48) и (49) и условий сопряжения (47) следует, что $b_n=d_n$, $a_n=-c_n$, $n=1,2,...$

Так что решение задачи Дирихле (40) может быть записано в виде

$$u(\rho,z)=\begin{cases} u^{+}(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n Z_{1n}^{+}(z)+b_n Z_{2n}^{+}(z)\right)\rho^{-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n\rho), \\ u^{-}(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n Z_{1n}^{-}(z)+b_n Z_{2n}^{-}(z)\right)\rho^{-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n\rho), \end{cases} \qquad (50)$$

Заменяя здесь $Z_{in}^{\pm}$ на их значения из (39), получим

$$u(\rho,z)=\begin{cases} u^{+}(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sqrt{z}I_{\frac{1}{2-m}}(p_n z^q)+b_n\sqrt{z}K_{\frac{1}{2-m}}(p_n z^q)\right)\rho^{-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n\rho),\ z>0, \\ u^{-}(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n\sqrt{-z}J_{\frac{1}{2-m}}(p_n(-z)^q)+b_n\sqrt{-z}Y_{\frac{1}{2-m}}(p_n(-z)^q)\right)\rho^{-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n\rho),\ z<0. \end{cases} \qquad (51)$$

Постоянные a_n и b_n находим из требования, чтобы решение (51) удовлетворяло граничным условиям (7). Подставляя его в эти граничные условия, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2-m}}(p_n\beta^q)+b_n\sqrt{\beta}K_{\frac{1}{2-m}}(p_n\beta^q)\right)\times$$
$$\times\rho^{-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n\rho)=\varphi(\rho), \qquad (52)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2-m}}(p_n\alpha^q)+b_n\sqrt{\alpha}Y_{\frac{1}{2-m}}(p_n\alpha^q)\right)\times$$
$$\times\rho^{-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n\rho)=\psi(\rho). \qquad (53)$$

Ряды (52) и (53) представляют собой разложения функций $\varphi(\rho)$ и $\psi(\rho)$ в ряды Фурье-Бесселя по системе собственных функций (22). В силу (29) коэффициенты этих разложений могут быть найдены по формулам

$$a_n\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2-m}}(p_n\beta^q)+b_n\sqrt{\beta}K_{\frac{1}{2-m}}(p_n\beta^q)=$$
$$=\frac{2}{\lambda_n^3 J_{\frac{k+2}{2}}^2(\lambda_n)}\int_0^1\varphi'''(\rho)\rho^{\frac{k+4}{2}}J_{\frac{k+4}{2}}(\lambda_n\rho)\,d\rho=\frac{\varphi_n'''}{\lambda_n^3},$$
$$-a_n\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2-m}}(p_n\alpha^q)+b_n\sqrt{\alpha}Y_{\frac{1}{2-m}}(p_n\alpha^q)= \qquad (54)$$
$$=\frac{2}{\lambda_n^3 J_{\frac{k+2}{2}}^2(\lambda_n)}\int_0^1\psi'''(\rho)\rho^{\frac{k+4}{2}}J_{\frac{k+4}{2}}(\lambda_n\rho)\,d\rho=\frac{\psi_n'''}{\lambda_n^3}.$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений относительно a_n и b_n, получим

$$a_n = \frac{\varphi_n''' \sqrt{\alpha} Y_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n \alpha^q\right) - \psi_n''' \sqrt{\beta} K_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n \beta^q\right)}{\lambda_n^3 \Delta_n(\alpha,\beta)},$$
$$b_n = \frac{\varphi_n''' \sqrt{\alpha} J_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n \alpha^q\right) + \psi_n''' \sqrt{\beta} I_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n \beta^q\right)}{\lambda_n^3 \Delta_n(\alpha,\beta)}, \qquad (55)$$

где

$$\varphi_n''' = \frac{2}{J^2_{\frac{k+2}{2}}(\lambda_n)} \int_0^1 \varphi'''(\rho) \rho^{\frac{k+6}{2}} J_{\frac{k+6}{2}}(\lambda_n \rho) d\rho,$$
$$\psi_n''' = \frac{2}{J^2_{\frac{k+2}{2}}(\lambda_n)} \int_0^1 \psi'''(\rho) \rho^{\frac{k+6}{2}} J_{\frac{k+6}{2}}(\lambda_n \rho) d\rho, \qquad (56)$$

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha\beta} \left(I_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n \beta^q\right) Y_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n \alpha^q\right) + \right.$$
$$\left. + J_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n \alpha^q\right) K_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n \beta^q\right) \right). \qquad (57)$$

Докажем равномерную сходимость рядов из (51) в полуцилиндре $\overline{D}$.

Известно [13], что для цилиндрических функций при $\xi \to \infty$ имеет место следующие асимптотические формулы

$$J_\nu(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^{1/2}}\right), Y_\nu(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^{1/2}}\right), \qquad (58)$$

$$I_\nu(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^{1/2}}\right) e^{\xi}, K_\nu(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^{1/2}}\right) e^{-\xi}. \qquad (59)$$

Также известно [11], что при $f(\rho) \in C[0,1]$ и $\xi \to \infty$

$$\int_0^1 f(\rho) \rho J_\nu(\xi\rho) d\rho = O\left(\frac{1}{\xi^{1/2}}\right). \qquad (60)$$

С помощью асимптотических формул (58)-(60) имеем, что при $n \to \infty$

$$\varphi_n''' = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{1/2}}\right), \psi_n''' = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{1/2}}\right), \qquad (61)$$

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) e^{p_n \beta^q}, \qquad (62)$$

$$a_n = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{5/2}}\right) e^{-p_n \beta^q}, b_n = O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right). \qquad (63)$$

Из асимптотических формул (58), (59), (61)-(63) следует, что при $-\alpha \le z \le \beta$, $0 \le \rho \le 1$ и $n \to \infty$

$$\left(a_n \sqrt{z} I_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n z^q\right) + b_n \sqrt{z} K_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n z^q\right) \right) \times$$
$$\times \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n \rho) = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{7/2}}\right),$$
$$\left(-a_n \sqrt{-z} J_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n (-z)^q\right) + b_n \sqrt{-z} Y_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n (-z)^q\right) \right) \times$$
$$\times \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n \rho) = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{7/2}}\right).$$

Отсюда следует, что для членов рядов из (51) в $\overline{D}$ имеют место следующие оценки

$$\left| \left(a_n \sqrt{z} I_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n z^q\right) + b_n \sqrt{z} K_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n z^q\right) \right) \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n \rho) \right| < \frac{C_1}{\lambda_n^{7/2}},$$
$$\left| \left(-a_n \sqrt{-z} J_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n (-z)^q\right) + b_n \sqrt{-z} Y_{\frac{1}{2-m}}\left(p_n (-z)^q\right) \right) \rho^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\lambda_n \rho) \right| < \frac{C_2}{\lambda_n^{7/2}}.$$

В силу признака Вейерштрасса ряды из (51) сходятся равномерно в $\overline{D}$ и, следовательно, $u(\rho,z) \in C(\overline{D})$.

Единственность решения задачи Дирихле (4) – (7) следует из полноты системы собственных функций (22) в пространстве $L_2\left([0,1], \rho^{k+1}\right)$.

Таким образом, доказана следующая **теорема:**

Если $\varphi, \psi \in C_0^3(0,1)$, *то задача Дирихле (4)-(7) однозначно разрешима и это решение определяется рядами (51).*

* * * * * * * * * *

1. *Франкль Ф.И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР: Сер. математическая. – 1945. – Т.9. – №2. – С.121-142.
2. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973. – 711 с.
3. *Бицадзе А.Б.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. – 1953. – Т.122. – №32. – С.167-170.
4. *Шабат Б.В.* Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. – 1957. – Т.112. – №3. – С.386-389.
5. *Вахания Н.Н.* Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа // Тр. АН ГрузССР. – 1963. – Т.3. – С.69-80.
6. *Cannon J.R.* Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinius coefficient // Ann. Math. pura ed appl. – 1963. – Vol.62. – P.371-377.
7. *Нахушев А.М.* Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т.6. – №1. – С.190-191.

8. *Хачев М.М.* Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. – Нальчик: Эльбрус, 1998. – 168 с.
9. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. – М.: МГУ, 1988. – 150 с.
10. *Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. – 2007. – №4. – С.45-53.
11. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций – М.: ИЛ, 1949. – Т.1. – 798 с.
12. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики – М.: Высш. шк., 2003 – 255 с.
13. *Бейтман Г.* Высшие трансцендетные функции – М.: Наука, 1966. – Т.2 – 296 с.

THE DIRICHLET PROBLEM WITH AXIAL SYMMETRY FOR THE EQUATION OF THE MIXED B-ELLIPTIC-B-HYPERBOLIC TYPE WITH CHARACTERISTIC DEGENERATION

R.M.Safina

In the given article we investigate the question of the correctness of the statement of the Dirichlet problem with axial symmetry for the equation mixed B-elliptic--B-hyperbolic type in the semi cylinder using the method of spectral decomposition on the basis of property of completeness of system of own functions of an one-dimensional spectral problem.

Key words: Bessel operator, equation of mixed type, Dirichlet problem, method of spectral analysis.

* * * * * * * * * *

Сафина Римма Марселевна – старший преподаватель кафедры экономической информатики и математики Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: rimma77705@mail.ru

Поступила в редакцию 22.10.2010