

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© А.А.Аганин, А.И.Давлетшин

Предлагаются математическая модель и методика решения задач близкого взаимодействия двух сферических пузырьков газа в жидкости с учетом влияния вязкости и сжимаемости жидкости, теплообмена между пузырьками и жидкостью. Модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для радиусов пузырьков и их пространственных положений и первого порядка для температур газа в каждом из пузырьков. В уравнения для радиусов пузырьков и их пространственных положений входят коэффициенты разложения потенциала скорости жидкости по полиномам Лежандра, которые определяются из системы линейных алгебраических уравнений. Порядок точности предлагаемой модели относительно отношения суммы радиусов пузырьков к расстоянию между их центрами произволен. Приведены примеры применения предлагаемой модели для описания близкого взаимодействия пузырьков.

**Ключевые слова:** взаимодействие пузырьков, акустическое поле, потенциал скорости жидкости.

### 1. Введение

Физические свойства жидкостей с пузырьками, происходящие в них химические превращения, биологические процессы и т.д. в значительной степени зависят от особенностей взаимодействия между пузырьками. Интенсивность такого взаимодействия увеличивается в акустических полях, где пузырьки совершают нелинейные радиальные колебания. В результате взаимодействия радиальные колебания отдельных пузырьков могут усиливаться и ослабляться, пузырьки могут удаляться друг от друга или сближаться, формировать устойчивые структуры (связанные пары, кластеры, стримеры), которые в последующем ведут себя как единое целое [1].

По мере сближения пузырьков взаимодействие между ними усиливается. В качестве меры близости двух пузырьков принято считать безразмерный параметр  $\delta = (R_1 + R_2) / d < 1$ , где  $R_1$ ,  $R_2$  – радиусы пузырьков,  $d$  – расстояние между их центрами. К настоящему времени наиболее исследованным является дальнее взаимодействие, когда расстояние между пузырьками относительно велико (когда  $\delta < 0,1$ ). Изучение дальнего взаимодействия началось еще на рубеже 19 и 20 веков [2]. Для этого применялись в основном математические модели второго порядка точности относительно  $\delta$ . Однако для адекватного описания наблюдаемых экспериментально кластеров и стримеров такой точности недостаточно, поскольку расстояния между пузырьками в этих структурах могут быть меньше тех, что характерны для дальнего взаимодействия. Для изучения более близкого взаимодействия были

разработаны модели, имеющие относительно  $\delta$  третий и четвертый порядки точности [1; 3; 4; 5].

В настоящей работе предлагаются математическая модель и метод расчета задач взаимодействия пузырьков в акустическом поле при произвольном расстоянии между взаимодействующими пузырьками с учетом влияния вязкости и сжимаемости жидкости, теплообмена между пузырьками и жидкостью. Предлагаемая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для радиусов пузырьков и их пространственных положений и первого порядка для температур газа в каждом из пузырьков. В уравнения для радиусов пузырьков и их пространственных положений входят коэффициенты представления потенциала скорости жидкости в виде суммы частных решений уравнения Лапласа в локальных сферических координатах пузырьков, которые определяются из системы линейных алгебраических уравнений. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений находится методом Дормана-Принса [6], а для решения возникающей при этом системы линейных алгебраических уравнений применяется метод последовательных приближений. Представлены примеры расчетов, иллюстрирующие применимость предлагаемой модели для изучения близкого взаимодействия пузырьков.

2. Постановка задачи

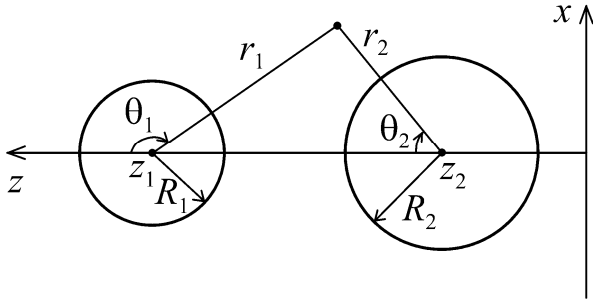


Рис. 1. Взаимное расположение пузырьков и систем отсчета.

Рассматривается взаимодействие двух газовых пузырьков при гармоническом изменении давления жидкости. Сила тяжести не учитывается. Пузырьки считаются сферическими, а газ в них – невязким гомобарическим. Такие допущения можно использовать при достаточно малых размерах пузырьков. В частности, можно ожидать, что форма взаимодействующих пузырьков будет близкой к сферической, если их равновесные радиусы меньше критического  $R_*$  относительно устойчивости сферической формы отдельного пузырька при его радиальных колебаниях в рассматриваемых условиях. Например, для воздушного пузырька в воде при комнатных условиях, когда давление жидкости изменяется гармонически с амплитудой 0,8 бар и частотой 20,6 кГц, имеем  $R_* \approx 16$  мкм [7].

Предполагается, что наряду с радиальными колебаниями пузырьки в результате взаимодействия совершают и пространственные перемещения вдоль прямой, проходящей через их центры (ось симметрии задачи). Эффекты вязкости и сжимаемости жидкости, теплообмена между пузырьками и жидкостью учитываются приближенно.

В неподвижной декартовой системе координат  $x, y, z$ , осью  $z$  которой является ось симметрии задачи (рис.1), уравнения поверхностей пузырьков можно записать в виде  $F_k(x, y, z, t) = 0$ , где  $t$  – время. Здесь и далее параметры, относящиеся к первому пузырьку ( $k = 1$ ), будем помечать нижним индексом 1, а параметры, относящиеся ко второму ( $k = 2$ ) – индексом 2.

Без учета эффектов вязкости и сжимаемости жидкости, теплообмена между пузырьками и жидкостью уравнения динамики жидкости в терминах потенциала скорости  $\Phi$  выглядят следующим образом

$$\nabla^2 \Phi = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p - p_\infty}{\rho_0} = 0. \tag{2}$$

Здесь  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $p$  – давление в произвольной точке жидкости,  $p_\infty$  – давление жидкости на бесконечном удалении от пузырьков.

На поверхности каждого пузырька ставятся кинематическое и динамическое контактные условия. В терминах потенциала скорости кинематическое условие имеет следующий вид

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla F_k = 0, \tag{3}$$

а динамическое – следующий

$$p = p_k - \frac{2\sigma}{R_k}. \tag{4}$$

Здесь  $R_k$  – радиус  $k$ -го пузырька,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $p_k$  – давление газа в  $k$ -м пузырьке, изменяющееся по закону

$$p_k = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{R_{0,k}} \right) \left( \frac{R_{0,k}}{R_k} \right)^{3\Gamma_k}, \tag{5}$$

где  $p_0$  – статическое давление жидкости,  $R_{0,k}$  – начальный радиус пузырька. Для изотермического пузырька  $\Gamma_k = 1$ , а для адиабатического  $\Gamma_k = \kappa$ ,  $\kappa$  – показатель адиабаты.

На бесконечном удалении от пузырьков давление жидкости  $p_\infty$  совершает гармонические колебания с амплитудой  $\Delta p$  и частотой  $\omega$  по закону

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t. \tag{6}$$

3. Уравнения для радиусов пузырьков и координат их центров

При выводе уравнений взаимодействия пузырьков наряду с неподвижной декартовой системой координат  $x, y, z$  используются также и подвижные сферические системы отсчета  $r_1, \theta_1, \varphi_1$  и  $r_2, \theta_2, \varphi_2$  с радиальными координатами, отсчитываемыми от центров пузырьков (рис.1). Расстояние между центрами пузырьков  $d$  определяется выражением  $d = z_1 - z_2$ , где  $z_1, z_2$  – координаты центров ( $z_1 > z_2$ ). Неподвижная и подвижные системы отсчета связаны соотношениями  $x = x(r_k, \theta_k), y = y(r_k, \theta_k), z = z(r_k, \theta_k, t)$ , так что для произвольной функции  $f = f(x, y, z, t)$  имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{Df}{Dt} - \mathbf{w}_k \cdot \nabla f, \tag{7}$$

где  $\partial f / \partial t, Df / Dt$  – производные по времени при постоянных  $x, y, z$  и  $r_k, \theta_k, \varphi_k$ , соответственно,  $\mathbf{w}_k = w_k \mathbf{k}$  – скорость подвижной системы координат,  $\mathbf{k}$  – единичный вектор оси  $z$ . Имеем  $w_k = \dot{z}_k$ , где  $\dot{z}_k$  – скорость пространственного перемещения центра  $k$ -го пузырька. Здесь и далее верхней точкой обозначается производная по времени.

С учетом (7) интеграл Коши-Лагранжа (2) и кинематическое условие (3) примут следующий вид

$$\frac{D\Phi}{Dt} - \mathbf{w}_k \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p - p_\infty}{\rho_0} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{DF_k}{Dt} - \mathbf{w}_k \cdot \nabla F_k + \nabla \Phi \cdot \nabla F_k = 0. \quad (9)$$

Уравнение поверхности пузырька в подвижной сферической системе координат записывается в виде

$$F_k(r_k, \tau) = r_k - R_k(\tau) = 0. \quad (10)$$

Потенциал скорости жидкости при наличии в ней двух пузырьков принимается следующим [5]

$$\Phi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma 1} P_{\gamma 1}}{r_1^{\gamma+1}} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma 2} P_{\gamma 2}}{r_2^{\gamma+1}}. \quad (11)$$

Здесь  $B_{\gamma k} = B_{\gamma k}(t)$ ,  $P_{\gamma k} = P_{\gamma}(\cos \theta_k)$  – полином Лежандра степени  $\gamma$  от  $\cos \theta_k$ . Первое слагаемое в правой части (11), обусловленное наличием 1-го пузырька, записано в системе координат 1-го пузырька, а второе, обусловленное наличием 2-го пузырька, – в системе координат 2-го.

Для представления потенциала (11) в системе координат  $k$ -го пузырька воспользуемся соотношением [8]

$$\frac{P_{\gamma 3-k}}{r_{3-k}^{\gamma+1}} = \sum_{\zeta=0}^{\infty} \frac{C_{\gamma \zeta} r_k^{\zeta} P_{\zeta k}}{s_{k 3-k}^{\gamma+\zeta} d^{\zeta+\gamma+1}}, \quad (12)$$

где  $C_{\gamma \zeta} = (-1)^{\zeta} (\gamma + \zeta)! / (\gamma! \zeta!)$ ,  $s_{1 2} = 1$ ,  $s_{2 1} = -1$ ,  $r_k < d$ .

С учетом (12) потенциал (11) в окрестности  $k$ -го пузырька (при  $r_k < d$ ) запишется следующим образом

$$\Phi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma k} P_{\gamma k}}{r_k^{\gamma+1}} + \sum_{\gamma, \zeta=0}^{\infty} \frac{C_{\gamma \zeta} B_{\gamma 3-k} r_k^{\zeta} P_{\zeta k}}{s_{k 3-k}^{\gamma+\zeta} d^{\zeta+\gamma+1}}. \quad (13)$$

Подставляя выражения поверхности пузырьков  $F_k(r_k, \tau)$  из (10) и выражения потенциала  $\Phi$  из (13) в кинематические условия (9) и учитывая ортогональность полиномов Лежандра, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов в представлении потенциала в виде (11)

$$B_{0k} = -\dot{R}_k R_k^2, \quad (14)$$

$$B_{1k} = -\frac{R_k^3}{2} \left( \dot{z}_k - \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{C_{\gamma 1} B_{\gamma 3-k}}{s_{k 3-k}^{\gamma+1} d^{\gamma+2}} \right),$$

$$B_{nk} = \frac{n R_k^{2n+1}}{n+1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{C_{\gamma n} B_{\gamma 3-k}}{s_{k 3-k}^{\gamma+n} d^{\gamma+n+1}}, \text{ где}$$

$$k = 1, 2, n = 2, 3, \dots$$

Система уравнений для радиусов пузырьков и координат их центров находится с использованием динамических условий (4), которые с учетом (8) становятся следующими

$$\rho_0 \left( \frac{D\Phi}{Dt} - \mathbf{w}_k \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) = p_\infty - \left( p_k - \frac{2\sigma}{R_k} \right). \quad (15)$$

Подставив в (15) выражение потенциала (13) и проведя ряд преобразований с учетом ортогональности полиномов Лежандра, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{\dot{B}_{0k}}{R_k} = -\frac{p_k - p_\infty}{\rho_0} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_k} - \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left[ \frac{(\gamma+1) B_{\gamma k}^2}{2 R_k^{2\gamma+4}} + \frac{C_{\gamma 0} \dot{B}_{\gamma 3-k}}{s_{k 3-k}^{\gamma} d^{\gamma+1}} - \frac{C_{\gamma 1} B_{\gamma 3-k} \dot{z}_{3-k}}{s_{k 3-k}^{\gamma+1} d^{\gamma+2}} \right] \quad (16)$$

$$- \sum_{\gamma, \zeta, \varsigma=0}^{\infty} \frac{\zeta C_{\gamma \zeta} C_{\zeta \varsigma} B_{\gamma 3-k} B_{\zeta 3-k} R_k^{2\zeta-2}}{2 s_{k 3-k}^{\gamma+\zeta} d^{\gamma+\zeta+2\varsigma+2}},$$

$$\frac{\dot{B}_{1k}}{R_k^2} = \dot{R}_k \dot{z}_k - \sum_{\gamma, \zeta=0}^{\infty} \frac{\Theta_{\gamma \zeta}^{\gamma+1} B_{\gamma k} B_{\zeta k}}{2 R_k^{\gamma+\zeta+4}} - \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left( \frac{C_{\gamma 1} \dot{B}_{\gamma 3-k} R_k}{s_{k 3-k}^{\gamma+1} d^{\gamma+2}} - \frac{2 C_{\gamma 2} B_{\gamma 3-k} R_k \dot{z}_{3-k}}{s_{k 3-k}^{\gamma} d^{\gamma+3}} \right) \quad (17)$$

$$+ \sum_{\gamma, \zeta, \varsigma=0}^{\infty} \frac{\bar{\Theta}_{\gamma \zeta}^{\varsigma+1} C_{\zeta \varsigma} B_{\gamma k} B_{\zeta 3-k} R_k^{\varsigma-\gamma-3}}{s_{k 3-k}^{\zeta+\varsigma} d^{\zeta+\varsigma+1}} - \sum_{\gamma, \zeta, \vartheta=0}^{\infty} \frac{\Theta_{\zeta \vartheta}^{\zeta \vartheta} C_{\gamma \zeta} C_{\zeta \vartheta} B_{\gamma 3-k} B_{\zeta 3-k} R_k^{\zeta \vartheta-2}}{2 s_{k 3-k}^{\gamma+\zeta+\vartheta} d^{\gamma+\zeta+\vartheta+2}}.$$

Здесь числа  $\Theta_{\gamma \zeta}^{nm}$ ,  $\bar{\Theta}_{\gamma \zeta}^{nm}$ ,  $\alpha_{\gamma \zeta \varsigma}$ ,  $\beta_{\gamma \zeta \varsigma}$  определяются выражениями

$$\Theta_{\gamma \zeta}^{nm} = n m \alpha_{\gamma \zeta 1} + \beta_{\gamma \zeta 1}, \quad \bar{\Theta}_{\gamma \zeta}^{nm} = n m \alpha_{\gamma \zeta 1} - \beta_{\gamma \zeta 1},$$

$$\alpha_{\gamma \zeta \varsigma} = \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 P_{\gamma} P_{\zeta} P_{\varsigma} d\eta,$$

$$\beta_{\gamma \zeta \varsigma} = \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P_{\gamma} P_{\zeta} P_{\varsigma} d\eta,$$

где  $\eta$  – аргумент полиномов Лежандра.

Дифференцируя первые два уравнения (14), подставляя в полученные выражения  $\dot{B}_{0k}$ ,  $\dot{B}_{1k}$  из (16), (17) и проделав некоторые преобразования, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно  $R_k$  и  $z_k$

$$R_k \ddot{R}_k + \frac{3}{2} \dot{R}_k^2 - \frac{\dot{z}_k^2}{4} - \frac{p_k - p_\infty}{\rho_0} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_k} = - \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{C_{\gamma 1} B_{\gamma 3-k} \dot{z}_k}{2 s_{k 3-k}^{\gamma+1} d^{\gamma+2}} + \left[ \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{C_{\gamma 1} B_{\gamma 3-k}}{2 s_{k 3-k}^{\gamma+1} d^{\gamma+2}} \right]^2 + \sum_{\gamma=2}^{\infty} \frac{(\gamma+1) B_{\gamma k}^2}{2 R_k^{2\gamma+4}} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left( \frac{C_{\gamma 0} \dot{B}_{\gamma 3-k}}{s_{k 3-k}^{\gamma} d^{\gamma+1}} - \frac{C_{\gamma 1} B_{\gamma 3-k} \dot{z}_{3-k}}{s_{k 3-k}^{\gamma+1} d^{\gamma+2}} \right) + \\
 & + \sum_{\gamma, \zeta, \varsigma=0}^{\infty} \frac{\zeta C_{\gamma \zeta} C_{\zeta \varsigma} B_{\gamma 3-k} B_{\zeta 3-k} R_k^{2\zeta-2}}{2s_{k 3-k}^{\gamma+\zeta} d^{\gamma+\zeta+2\zeta+2}} + \Psi_{0k} + \Delta_k, \\
 & R_k \ddot{z}_k + 3\dot{z}_k \dot{R}_k = \frac{36B_{1k} B_{2k}}{5R_k^7} + \\
 & + \sum_{\gamma, \varsigma=2}^{\infty} \frac{\Theta_{\gamma \varsigma}^{\gamma+1} B_{\gamma k} B_{\varsigma k}}{R_k^{\gamma+\varsigma+4}} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left[ C_{\gamma 1} \frac{3\dot{B}_{\gamma 3-k} R_k + B_{\gamma 3-k} \dot{R}_k}{s_{k 3-k}^{\gamma+1} d^{\gamma+2}} \right. \\
 & \left. + \frac{2C_{\gamma 2} B_{\gamma 3-k} R_k (\dot{z}_k - 3\dot{z}_{3-k})}{s_{k 3-k}^{\gamma} d^{\gamma+3}} \right] - \\
 & - \sum_{\gamma, \zeta, \varsigma=0}^{\infty} \frac{2\bar{\Theta}_{\gamma \zeta}^{\zeta+1} C_{\zeta \varsigma} B_{\gamma k} B_{\zeta 3-k} R_k^{\zeta-\gamma-3}}{s_{k 3-k}^{\zeta+\varsigma} d^{\zeta+\varsigma+1}} \\
 & + \sum_{\gamma, \zeta, \vartheta=0}^{\infty} \frac{\Theta_{\zeta \vartheta}^{\zeta} C_{\gamma \zeta} C_{\zeta \vartheta} B_{\gamma 3-k} B_{\zeta 3-k} R_k^{\zeta+9-2}}{s_{k 3-k}^{\gamma+\zeta+\vartheta} d^{\gamma+\zeta+\vartheta+2}} + \Psi_{1k}.
 \end{aligned} \quad (19)$$

В (18), (19) введены поправки  $\Psi_{0k}$ ,  $\Psi_{1k}$ ,  $\Delta_k$  ( $k = 1, 2$ ), учитывающие эффекты вязкости ( $\Psi_{0k}$ ,  $\Psi_{1k}$ ) и сжимаемости ( $\Delta_k$ ) жидкости. Они будут определены ниже.

#### 4. Метод решения

Система (18), (19) решается численно высокоточным методом Дормана-Принса с переменным шагом интегрирования по времени [6]. Для его применения уравнения (18), (19) нужно представить в каноническом виде

$$\begin{aligned}
 \ddot{R}_k &= f_k(R_1, z_1, R_2, z_2, \dot{R}_1, \dot{z}_1, \dot{R}_2, \dot{z}_2), \\
 \ddot{z}_k &= g_k(R_1, z_1, R_2, z_2, \dot{R}_1, \dot{z}_1, \dot{R}_2, \dot{z}_2).
 \end{aligned}$$

Для этого нужно найти коэффициенты  $B_{\gamma k}$  из (14) и их производные  $\dot{B}_{\gamma k}$  из (16), (17) и уравнений

$$\dot{B}_{nk} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{n C_{\gamma n}}{(n+1) s_{k 3-k}^{\gamma+n}} \left( \frac{R_k^{2n+1} B_{\gamma 3-k}}{d^{\gamma+n+1}} \right)', \quad (20)$$

$$k = 1, 2, n = 2, 3, \dots,$$

полученных дифференцированием последнего выражения (14) (штрих, как и точка, означает дифференцирование по  $t$ ). Рассмотрим определенные  $B_{\gamma k}$  и  $\dot{B}_{\gamma k}$  более подробно.

Коэффициенты  $B_{\gamma k}$  находятся из (14) методом последовательных приближений. Он построен с учетом того, что, как следует из (14),  $B_{nk} \sim \delta^{n+1}$  при  $n \geq 2$ , т.е. коэффициенты  $B_{nk}$  при  $n \geq 2$  имеют относительно  $\delta$  порядок  $n+1$ , где  $\delta = (R_1 + R_2) / d < 1$ . С учетом этого для определения решения с  $N$ -м порядком точности нужно выполнить  $N$  итераций по следующему алгоритму, реализующему метод последовательных приближений,

$$B_{0k}^{(\alpha)} = -\dot{R}_k R_k^2, \alpha \geq 0; \quad B_{1k}^{(0)} = -\frac{R_k^3 \dot{z}_k}{2}, \quad (21)$$

$$B_{1k}^{(\alpha)} = -\frac{R_k^3}{2} \left( \dot{z}_k - \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} \frac{C_{\gamma 1} B_{\gamma 3-k}^{(\alpha-1)}}{s_{k 3-k}^{\gamma+1} d^{\gamma+2}} \right), \alpha \geq 1;$$

$$B_{nk}^{(\alpha)} = 0, 0 \leq \alpha \leq n,$$

$$B_{nk}^{(\alpha)} = \frac{n R_k^{2n+1}}{n+1} \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} \frac{C_{\gamma n} B_{\gamma 3-k}^{(\alpha-1)}}{s_{k 3-k}^{\gamma+n} d^{\gamma+n+1}}, \alpha \geq n+1, \quad (22)$$

где  $k = 1, 2$ ,  $n \geq 2$ , а верхним индексом в круглых скобках обозначен номер приближения.

Производные  $\dot{B}_{\gamma k}$ , как и  $B_{\gamma k}$ , находятся методом последовательных приближений из системы линейных алгебраических (относительно  $\dot{B}_{\gamma k}$ ) уравнений (16), (17), (20).

Таким образом, для получения решения  $N$ -го порядка точности относительно  $\delta$  при определенных коэффициентов  $B_{\gamma k}$  из (14) и их производных  $\dot{B}_{\gamma k}$  из (16), (17), (20) методом последовательных приближений делается  $N$  итераций.

#### 5. Учет эффектов вязкости и сжимаемости жидкости, теплообмена между пузырьками и жидкостью

Эффект вязкости жидкости учитывается в предположении потенциальности движения жидкости [9]. В этом случае динамическое граничное условие (4) изменяется на  $p = p_k - 2(2\mu \dot{R}_k + \sigma) / R_k$ , а в уравнениях (18), (19) будем иметь ( $A_{\mu} = 1$ )

$$\Psi_{01} = -\frac{4v\dot{R}_1}{R_1},$$

$$\Psi_{11} = -\frac{12A_{\mu} v}{R_1} \left( \dot{z}_1 - \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{C_{\gamma 1} B_{\gamma 2}}{d^{\gamma+2}} \right), \quad (23)$$

$$\Psi_{02} = -\frac{4v\dot{R}_2}{R_2},$$

$$\Psi_{12} = -\frac{12A_{\mu} v}{R_2} \left( \dot{z}_2 - \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{G_{\gamma 1} B_{\gamma 1}}{d^{\gamma+2}} \right). \quad (24)$$

Влияние сжимаемости жидкости на динамику пузырьков учитывается без учета их взаимодействия друг с другом [5]. В результате в уравнениях для радиусов пузырьков будем иметь [10]

$$\begin{aligned}
 \Delta_k &= \frac{\dot{R}_k}{c_0} \left( R_k \ddot{R}_k + \frac{\dot{R}_k^2}{2} + \frac{\dot{z}_k^2}{4} + \frac{p_k - p_{\infty}}{\rho_0} \right) + \\
 & + \frac{R_k}{c_0} \left( \frac{\dot{z}_k \ddot{z}_k}{2} + \frac{\dot{p}_k - \dot{p}_{\infty}}{\rho_0} \right),
 \end{aligned} \quad (25)$$

где  $c_0$  – скорость звука в жидкости.

Выражение для давления (5) соответствует либо чисто изотермическому ( $\Gamma_k = 1$ ), либо чисто

адиабатическому ( $\Gamma_k = \kappa$ ,  $\kappa$  – показатель адиабаты) пузырьку. В настоящей работе, следуя [11],  $\Gamma_k$  считается функцией числа Пекле, которое принимается в виде  $Pe_k = R_k U_k / \chi_k$ , где  $U_k$  – характерная скорость радиального движения поверхности пузырька,  $\chi_k = \lambda_k / (\rho_k c_v)$ ,  $\lambda_k$  – коэффициент теплопроводности газа в пузырьке,  $c_v$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $\rho_k$  – плотность газа в пузырьке. Полагается, что  $\lambda_k = \lambda_0 (T_k / T_0)^{0.5}$ ,  $\rho_k = \rho_{0,k} (R_{0,k} / R_k)^3$ ,  $\rho_{0,k} = p_{0,k} / (R_g T_0)$ , где  $T_0$  – температура жидкости,  $T_k$  – температура газа,  $\lambda_0$  – теплопроводность газа при температуре  $T_0$ ,  $\rho_{0,k}$  – начальная плотность газа,  $p_{0,k}$  – начальное давление газа,  $R_g$  – газовая постоянная. В качестве характерной скорости  $U_k$  принимается характерная скорость свободных незатухающих колебаний адиабатического пузырька

$$U_k = \sqrt{\dot{R}_k^2 + \frac{2p_0}{3\rho_0} \left\{ 1 + \frac{1}{\kappa - 1} \left( \frac{R_{0,k}}{R_k} \right)^3 \left[ \left( \frac{R_{0,k}}{R_k} \right)^{3\kappa - 3} - \kappa \right] \right\}}$$

Зависимость  $\Gamma_k$  от числа  $Pe_k$  аппроксимируется выражением [11]

$$\Gamma_k (Pe_k) = 1 + (\kappa - 1) \exp \left[ -5.8 (Pe_k)^{-0.6} \right].$$

В результате давление газа в пузырьках определяется выражением

$$p_k = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{R_{0,k}} \right) \left( \frac{R_{0,k}}{R_k} \right)^3 \frac{T_k}{T_0}, \quad (26)$$

где температура газа  $T_k$  находится из уравнения

$$\dot{T}_k = \frac{3(1 - \Gamma_k) \dot{R}_k T_k}{R_k} + \frac{3\chi_k (T_0 - T_k)}{R_k^2}. \quad (27)$$

При использовании (26), (27) вместо (5) в правых частях уравнений для радиусов пузырьков (18) возникает зависимость от температуры  $T_k$ , а к системе уравнений (18), (19) добавляются уравнения (27). При этом описанный выше алгоритм численного решения остается неизменным.

Система уравнений (18), (19), (27), в которой коэффициенты  $B_{\gamma k}$  определяются выражениями (14), а их производные  $\dot{B}_{\gamma k}$  – выражениями (16), (17), (20), поправки на вязкость и сжимаемость жидкости  $\psi_{0k}$ ,  $\psi_{1k}$ ,  $\Delta_k$  – выражениями (23)-(25), а давление газа в пузырьках  $p_k$  – равенством (26), и представляет собой предлагаемую модель взаимодействия пузырьков.

### 6. Верификация метода расчета

Для проверки правильности работы алгоритма расчета было проведено сравнение с результатами работы [5], где использовалась модель третьего порядка точности по  $\delta$ , вязкость жидкости учитывалась согласно (23), (24) при  $A_\mu = 1.5$ ,

сжимаемость – согласно (25) в предположении  $\dot{z}_k = 0$ , а пузырьки предполагались адиабатическими ( $\Gamma_k = \kappa$ ).

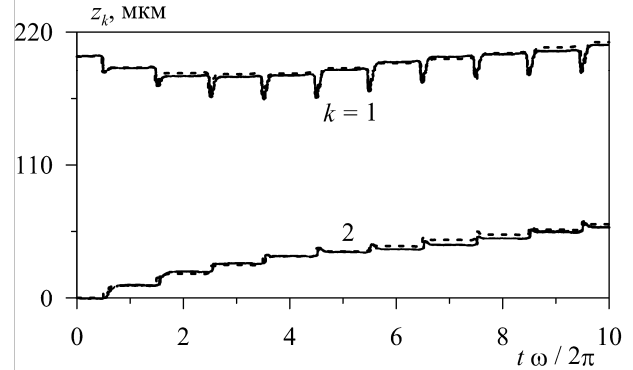


Рис.2. Изменение положений центров двух пузырьков на линии их взаимодействия в условиях работы [5]. Штриховые линии – результаты настоящей работы, сплошные – результаты работы [5].

На рис.2 приведено сравнение изменений координаты центров пузырьков, рассчитанных с третьим порядком точности ( $N = 3$ ) по методике настоящей работы (штриховые кривые), с результатами работы [5] (сплошные кривые). Входные данные задачи следующие:  $c_0 = 1500$  м/с,  $\rho_0 = 998$  кг/м<sup>3</sup>,  $p_0 = 1$  бар,  $\sigma = 0,0725$  Н/м,  $\mu = 10^{-3}$  кг/(м с),  $\kappa = 1,4$ ,  $\Delta p = 1,2$  бар,  $\omega/2\pi = 20$  кГц. В начальный момент времени  $\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = 0$ ,  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0$ ,  $R_1 = 5$  мкм,  $R_2 = 7$  мкм,  $z_1 = 200$  мкм,  $z_2 = 0$  ( $d = 200$  мкм). Как видно, согласование решений настоящей работы и работы [5] весьма удовлетворительное.

### 7. Моделирование взаимодействия пузырьков

Некоторые характерные особенности взаимодействия пузырьков в рассматриваемых ниже задачах демонстрируются на примере взаимодействия пузырьков одинаковых размеров. Результаты расчетов для одного периода колебаний давления жидкости представлены на рис.3. В верхней части рис.3 приведены временные зависимости радиусов пузырьков и параметра  $\Gamma_k$ , а в нижней – временные зависимости положений центров пузырьков на оси  $z$  и величины малого параметра  $\delta$ . Решение получено с третьим ( $N = 3$ ) порядком точности относительно  $\delta$  при следующих входных данных:  $c_0 = 1500$  м/с,  $\rho_0 = 998$  кг/м<sup>3</sup>,  $p_0 = 1$  бар,  $T_0 = 293,15$  К,  $\sigma = 0,0725$  Н/м,  $\mu = 10^{-3}$  кг/(м с),  $\kappa = 1,4$ ,  $c_v = 720$  Дж/(кг К),  $\lambda_0 = 0,0258$  Вт/(м К),  $R_g = 287$  Дж/(кг К),  $\Delta p = 1,2$  бар,  $\omega/2\pi = 20$  кГц. При  $t = 0$ :  $R_1 = R_2 = 3$  мкм,  $\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = 0$ ,  $z_1 = 300$  мкм,  $z_2 = 0$  ( $d = 300$  мкм),  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0$ .

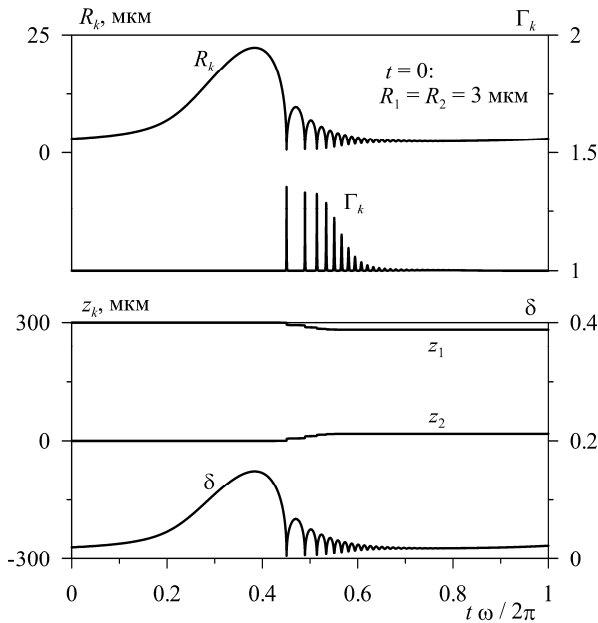


Рис.3. Изменение  $R_k$  – радиуса пузырьков,  $z_k$  – координат их центров,  $\Gamma_k$  – показателя политропы газа в пузырьках, зависящего от числа Пекле, и  $\delta$  – параметра, характеризующего близость пузырьков в задаче взаимодействия двух одинаковых пузырьков.

Большую часть времени пузырьки при взаимодействии ведут себя как изотермические ( $\Gamma_k \approx 1$ ). Вместе с тем, кратковременно в окрестностях локальных экстремальных сжатий, возникающих в ходе радиальных колебаний пузырьков, следующих за их максимальным расширением, поведение пузырьков становятся близкими к адиабатическому (величина  $\Gamma_k$  заметно превышает 1, приближаясь к  $k = 1,4$ ). Это означает, что пузырьки нельзя рассматривать как чисто изотермические, или адиабатические.

Для пространственных перемещений пузырьков характерно, что при расширении они смещаются значительно меньше и медленнее, чем при сжатии. Наибольшие смещения наблюдаются в ходе первого наиболее сильного сжатия, особенно в его заключительной высокоскоростной стадии, где смещение составляет около 6 мкм, что в 2 раза больше равновесного радиуса. Последующие пространственные перемещения в ходе затухающих радиальных колебаний являются менее выраженными, а к концу периода практически исчезают. Параметр  $\delta$ , характеризующий близость взаимодействия, принимает максимальное значение (около 0,16) в момент максимального расширения пузырьков. Далее приводятся два примера при входных данных и начальных условиях, близких к тем, что использовались в предыдущем случае.

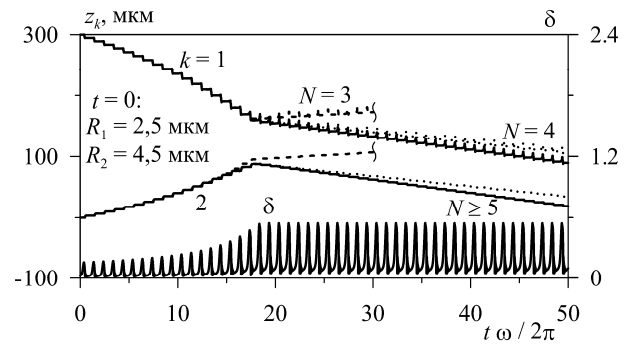


Рис.4. Изменение координат центров пузырьков и параметра  $\delta$  в задаче взаимодействия двух сферических пузырьков. Период пространственных колебаний пузырьков в паре совпадает с периодом внешнего возбуждения. Штриховые линии – решение, полученное относительно  $\delta$  с порядком точности  $N = 3$ , пунктирные – с порядком точности  $N = 4$ , сплошные – с  $N = 5$ .

На рис.4 представлены временные зависимости положения пузырьков на оси  $z$  и параметра  $\delta$  в ходе взаимодействия пузырьков на протяжении 50 периодов колебаний давления жидкости. В начале взаимодействия  $R_1 = 2,5$  мкм,  $R_2 = 4,5$  мкм. Приведены решения, полученные относительно  $\delta$  с порядком точности  $N = 3$  (штриховые кривые), 4 (пунктирные кривые) и 5 (сплошные кривые). Кривые с  $N \geq 5$  совпадают. В ходе первых 15 периодов пузырьки находятся еще относительно далеко друг от друга, так что их взаимодействие можно описывать моделью третьего порядка. Затем примерно через 3 периода пузырьки формируют связанную пару, которая в последующем смещается как единое целое. При  $N = 3$  расстояние между пузырьками в паре описывается удовлетворительно, а направление их смещения – неверно (пузырьки движутся противоположно тому, что должно быть). При  $N = 4$  скорость смещения пары получается правильной по направлению, но неверной по величине. И лишь модели с  $N \geq 5$  дают полностью правильное решение. Максимальное значение параметра  $\delta$  при сближении пузырьков и формировании связанной пары возрастает от 0,15 до 0,55, а затем остается постоянным.

На рис.5 представлены результаты для начальных значений  $R_1 = 3$  мкм,  $R_2 = 4,2$  мкм,  $z_1 = 600$  мкм,  $z_2 = 0$  ( $d = 600$  мкм). Сходимость в этом примере достигается при  $N \geq 6$ . Пузырьки здесь также сначала сближаются, а затем образуют связанную пару. Однако теперь пузырьки в связанной паре колеблются не с периодом, равным периоду колебаний давления жидкости, а с периодом, в два раза превышающим его.

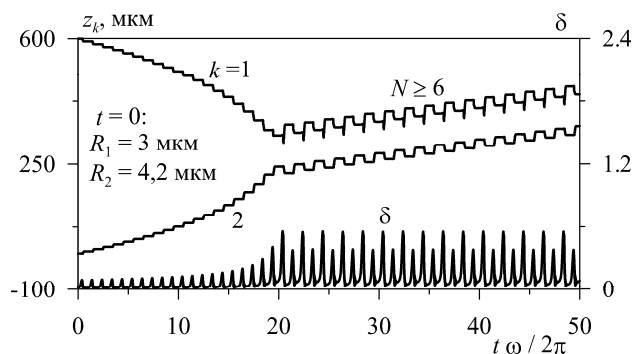


Рис.5. Изменение координат центров пузырьков и параметра  $\delta$  в задаче взаимодействия двух сферических пузырьков. После образования пары пузырьки двигаются с периодом в два раза превышающим период колебаний давления жидкости. Решение получено с шестым ( $N = 6$ ) порядком точности относительно  $\delta$ .

### 8. Заключение

Предложены математическая модель и метод расчета задач близкого взаимодействия двух сферических пузырьков газа в жидкости, когда точности имеющихся в литературе моделей третьего порядка относительно безразмерного параметра  $\delta = (R_1 + R_2) / d < 1$  ( $R_1, R_2$  – радиусы пузырьков,  $d$  – расстояние между их центрами) оказывается недостаточно. Порядок точности предлагаемой модели относительно  $\delta$  произволен. В ней учитываются эффекты вязкости и сжимаемости жидкости, влияние теплообмена пузырьков с окружающей жидкостью. Предлагаемая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков и пространственного положения их центров и первого порядка относительно температуры газа в пузырьках. В уравнения для радиусов пузырьков и координат их центров входят коэффициенты представления потенциала скорости жидкости в виде суммы частных решений уравнения Лапласа в сферических координатах пузырьков. Для иллюстрации применимости предлагаемой модели приведены два примера, различающиеся характером пространственных перемещений пузырьков после образования связанной пары. В первом примере период простран-

ственных колебаний пузырька в паре совпадает с периодом колебаний давления жидкости, а во втором превышает его в два раза.

Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке РФФИ.

\*\*\*\*\*

1. *Konovalova S.I., Akhatov I.Sh.* Structure formation in acoustic cavitation // *Multiphase Science and Technology*. – 2005. – Vol.17. – №3. – P.343-371.
2. *Bjerknes V.F.K.* Field of Force. – New York: Columbia University Press, 1906. – 173 p.
3. *Кузнецов Г.Н., Щукин И.Е.* Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости // *Акустический журнал*. – 1972. – Т.18. – №4. – С.565-570.
4. *Harkin A., Kaper T.J., Nadim A.* Pulsation and translation of two gas bubbles // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2001. – Vol.445. – P.377-411.
5. *Doinikov A.A.* Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // *Physical Review E*. – 2001. – Vol.64. – №2. – 026301 (6 p.).
6. *Хайпер Э., Нерсетт С., Виннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
7. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.* Нелинейные несферические колебания пузырька газа при периодическом изменении давления окружающей жидкости // *Теплофизика и аэромеханика*, 2008. – Т.15. – №3. – С.521-533.
8. *Hobson E.W.* The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1931. – 476 p.
9. *Gavriilyuk S.L., Teshukov V.M.* Drag force acting on a bubble in a cloud of compressible spherical bubbles at large Reynolds number // *European Journal of Mechanics B/Fluids*. – 2005. – Vol.24. – №4. – P.468-477.
10. *Doinikov A.A.* Equations of coupled radial and translational motions of a bubble in a weakly compressible liquid // *Physics of Fluids*. – 2005. – Vol.17. – №12. – 128101 (4 p.).
11. *Hilgenfeldt S., Grossmann S., Lohse D.* Sonoluminescence light emission // *Physics of Fluids*. – 1999. – Vol.11. – №6. – P.1318-1330.

## INTERACTION OF TWO SPHERICAL GAS BUBBLES IN A LIQUID IN AN ACOUSTIC FIELD

A.A.Aganin, A.I.Davletshin

A mathematical model and a technique for solving problems of close-range interaction of two spherical gas bubbles in a liquid with allowing for the effects of the liquid viscosity and compressibility, heat transfer between the bubbles and liquid are proposed. The model is a system of ordinary second order differential equations for the radii of the bubbles and their spatial positions and the first order ones for the gas

temperature in each bubble. The equations for the radii of the bubbles and their spatial positions contain coefficients of expansion of the fluid velocity potential in Legendre polynomials, which are determined from a system of linear algebraic equations. The order of accuracy of the proposed model relative to the ratio of sum of the radii of interacting bubbles to the distance between their centers is arbitrary. Some examples of application of the proposed model to describing close-range interaction between the bubbles are presented.

**Key words:** bubble interaction, acoustic field, velocity potential.

\* \* \* \* \*

**Аганин Александр Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и вычислительных технологий Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета, заведующий лабораторией Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН.

E-mail: [aganin@kfti.knc.ru](mailto:aganin@kfti.knc.ru)

**Давлетшин Анас Ильгизович** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН.

E-mail: [davanas@mail.ru](mailto:davanas@mail.ru)

Поступила в редакцию 07.05.2011