

## ЗАМКНУТАЯ ФОРМА ОПЕРАТОРОВ МЕТОДА НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

© А.В.Матросов

Решено в случае ортотропного тела рекуррентное соотношение алгоритма метода начальных функций (МНФ), что позволило выразить в замкнутой форме операторы МНФ и получить в гипербола-тригонометрическом виде решение плоской задачи теории упругости ортотропного тела.

**Ключевые слова:** метод начальных функций, краевая задача, вычислительная устойчивость.

### 1. Введение

Метод начальных функций (МНФ) позволяет строить аналитические решения для краевых задач теории упругости. Для анизотропных тел с его помощью обычно строится решение в виде степенных рядов по одной из декартовых координат. При этом трудно судить о сходимости полученных рядов. В случае получения замкнутой формы операторов МНФ (по существу, просуммировать ряды) вопрос о сходимости степенных рядов, используемых в решении МНФ, решается просто, так как в результате воздействия операторов МНФ на начальные функции будет известна формула общего члена получаемого степенного ряда решения, что может позволить вычислить его сумму. Для плоской задачи изотропного тела замкнутая форма операторов МНФ получена в [1]. В данной работе получена замкнутая форма операторов МНФ для плоской задачи ортотропного тела, а также получено решение через гипербола-тригонометрические функции в случае задания начальных функций в виде тригонометрических.

### 2. Основное соотношение МНФ

В работе [2] представлен алгоритм получения основного соотношения МНФ для плоской задачи линейно-упругого анизотропного тела в декартовой системе координат в матрично-операторном виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{U}_0. \quad (1)$$

С помощью этого соотношения, зная вектор начальных функций  $\mathbf{U}_0 = \{u_0(x), v_0(x), \sigma_y^0(x), \tau_{xy}^0(x)\}$ , компоненты которого определены на линии  $y=0$ , можно вычислить все компоненты вектора НДС  $\mathbf{U} = \{u(x, y), v(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y), \sigma_x(x, y)\}$  линейно-упругого анизотропного тела. Элементы (операторы МНФ) матрицы  $\mathbf{L} = [L_{ij}]$ , ( $i=1, \dots, 5$ ,  $j=1, \dots, 4$ ), представляют собой степенные ряды

по переменной  $y$  с коэффициентами, зависящими от упругих постоянных материала  $A_{qr}$  и оператора  $\partial_x \equiv \partial/\partial x$  дифференцирования по переменной  $x$

$$L_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^{i,j} (A_{qr}, \partial_x) y^k. \quad (2)$$

Вид (2) операторов МНФ получается из их представления через функции  $M_2(y)$ ,  $M_3(y)$  и их производные в процессе построения соотношения (1) на основе алгоритма МНФ

$$L_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^3 \left[ \left( P_{1j}^0 \partial_y^{k-1} M_2 + \frac{P_{2j}^0}{\Delta} \partial_x \partial_y^{k-1} M_3 \right) b_{ik} \partial_x^{3-k} + \left( P_{3j}^0 \partial_y^{k-1} M_2 + \frac{P_{4j}^0}{\Delta} \partial_x \partial_y^{k-1} M_3 \right) b_{i,k+3} \partial_x^{3-k} \right], \quad (3)$$

$i=1, 2, j=1, 2,$

$$L_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^4 \left[ \left( P_{1j}^0 \partial_y^{k-1} M_2 + \frac{P_{2j}^0}{\Delta} \partial_x \partial_y^{k-1} M_3 \right) g_{ik} \partial_x^{4-k} + \left( P_{3j}^0 \partial_y^{k-1} M_2 + \frac{P_{4j}^0}{\Delta} \partial_x \partial_y^{k-1} M_3 \right) g_{i,k+3} \partial_x^{4-k} \right], \quad (4)$$

$i=3, 4, 5, j=1, 2.$

В (3) и (4) коэффициенты  $b_{ik}$ ,  $g_{ik}$ ,  $P_{ij}^0$  и  $\Delta$  зависят только от упругих постоянных анизотропного материала и имеют следующие значения:  $b_{11} = b_{26} = A_{66}$ ,  $b_{12} = 2A_{26}$ ,  $b_{13} = A_{22}$ ,  $b_{14} = b_{21} = -A_{16}$ ,  $b_{15} = b_{22} = -(A_{12} + A_{66})$ ,  $b_{16} = b_{23} = -A_{26}$ ,  $b_{24} = A_{11}$ ,  $b_{25} = 2A_{16}$ ,  $g_{11} = g_{27} = g_{38} = -A_{16}A_{26} + A_{12}A_{66}$ ,  $g_{12} = -g_{17}/2 = -g_{23} = -g_{34} = -A_{16}A_{22} + A_{12}A_{26}$ ,  $-g_{13} = g_{18} = g_{24} = A_{22}A_{66} - A_{26}^2$ ,  $g_{14} = g_{21} = g_{28} = g_{35} = 0$ ,  $g_{15} = g_{26} = g_{32}/2 = -g_{37} = A_{11}A_{26} - A_{12}A_{16}$ ,  $g_{16} = g_{33} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{66} - A_{12}^2 + A_{16}A_{26}$ ,

$$\begin{aligned} g_{22} &= A_{16}A_{26} - A_{12}A_{66}, \quad g_{25} = g_{31} = -g_{36} = A_{11}A_{66} - A_{16}^2 \\ P_{11}^0 &= A_{66}, \quad P_{12}^0 = A_{26}, \quad P_{31}^0 = A_{26}, \quad P_{32}^0 = A_{22}, \\ P_{21}^0 &= -A_{16}A_{22}A_{66} - A_{16}A_{26}^2 + 2A_{12}A_{26}A_{66}, \\ P_{22}^0 &= -2A_{16}A_{22}A_{26} + A_{12}A_{26}^2 + A_{12}A_{22}A_{66}, \\ P_{41}^0 &= -2A_{16}A_{22}A_{66} + 2A_{12}A_{26}^2 - A_{26}^2A_{66} + A_{22}A_{66}^2, \\ P_{42}^0 &= 2A_{12}A_{22}A_{26} - 2A_{16}A_{22}^2 + A_{22}A_{26}A_{66} - A_{26}^3, \\ \Delta &= A_{22}A_{66} - A_{26}^2, \quad \text{а сами функции } M_2(y) \text{ и } \\ M_3(y) &\text{ имеют вид степенных рядов} \end{aligned}$$

$$M_p = y^p / p! + \sum_{k=4}^{\infty} m_{pk} y^k / k!, \quad p = 2, 3, \quad (5)$$

коэффициенты  $m_{pk}$  которых определяются из рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} D_0 m_{p,k+4} + D_1 m_{p,k+3} + D_2 m_{p,k+2} + \\ + D_3 m_{p,k+1} + D_4 m_{pk} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

со следующими начальными условиями:  $m_{pk} = 1$ , если  $p = k$ , иначе  $m_{pk} = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Коэффициенты  $D_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$  уравнения (6) выражаются через упругие константы и оператор дифференцирования  $\partial_x$  следующим образом

$$\begin{aligned} D_0 &= A_{22}A_{66} - A_{26}^2, \\ D_1 &= 2(A_{16}A_{22} - A_{12}A_{26})\partial_x, \\ D_2 &= (A_{11}A_{22} + 2A_{16}A_{26} - 2A_{12}A_{66} - A_{12}^2)\partial_x^2, \\ D_3 &= 2(A_{11}A_{26} - A_{12}A_{16})\partial_x^3, \\ D_4 &= (A_{11}A_{66} - A_{16}^2)\partial_x^4. \end{aligned} \quad (7)$$

Обычно при реализации МНФ коэффициенты  $m_{pk}$  вычисляются последовательно с использованием рекуррентного соотношения (6), начиная с  $m_{p4}$  и до того номера  $k$ , при котором можно считать, что суммы рядов (5) вычислены. Такой подход связан с тем, что в общем случае анизотропии найти общее решение уравнения (6) с указанными начальными условиями для получения формул общих членов рядов (5) не представляется возможным.

### 3. Случай ортотропного материала

Общее решение рекуррентного соотношения (6) можно получить, зная корни его характеристического уравнения

$$D_0 \lambda^4 + D_1 \lambda^3 + D_2 \lambda^2 + D_3 \lambda + D_4 = 0. \quad (8)$$

Тогда общее решение рекуррентного соотношения запишется в виде [3]

$$f_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k P_i(k), \quad (9)$$

где  $\lambda_i$  – корень характеристического уравнения кратности  $p_i$ ,  $P_i$  – многочлен степени  $p_i - 1$ , ко-

эффициенты которого определяются так, чтобы равенство (9) было справедливо для первых четырех членов рассматриваемой последовательности,  $\sum_{i=1}^m p_i = 4$ .

Общее решение линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами можно также построить, решив двойственное уравнение

$$D_0 + D_1 \tilde{\lambda} + D_2 \tilde{\lambda}^2 + D_3 \tilde{\lambda}^3 + D_4 \tilde{\lambda}^4 = 0, \quad (10)$$

корни которого связаны с корнями характеристического уравнения (8) следующим образом  $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , а поэтому общее решение рекуррентного соотношения (6) может быть записано и с использованием корней уравнения (10)

$$f_k = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^k} P_i(k). \quad (11)$$

В случае ортотропии ( $A_{16} = A_{26} = 0$ ) исходное рекуррентное соотношение (6) упрощается (коэффициенты  $D_1 = D_3 = 0$ ) и соответствующее ему характеристическое уравнение (8) переходит в бигармоническое

$$D_0 \lambda^4 + D_2 \lambda^2 + D_4 = 0 \quad (12)$$

с коэффициентами  $D_0 = d_0$  ( $d_0 = A_{22}A_{66}$ ),  $D_2 = d_2 \partial_x^2$  ( $d_2 = A_{11}A_{22} - 2A_{12}A_{66} - A_{12}^2$ ),  $D_4 = d_4 \partial_x^4$  ( $d_4 = A_{11}A_{66}$ ).

Его решением, если  $D_2^2 - 4D_0D_4 \neq 0$ , будут следующие четыре различные величины (четыре однократных корня):

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{-\frac{D_2 - \sqrt{D_2^2 - 4D_0D_4}}{2D_0}}, \\ \lambda_{3,4} &= \pm \sqrt{-\frac{D_2 + \sqrt{D_2^2 - 4D_0D_4}}{2D_0}}, \end{aligned}$$

а поэтому общее решение рекуррентного соотношения (6) запишется в виде

$$f_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + C_3 \lambda_3^k + C_4 \lambda_4^k \quad (12)$$

или через корни  $\tilde{\lambda}_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{D_2 + \sqrt{D_2^2 - 4D_0D_4}}{2D_4}}$ ,

$\tilde{\lambda}_{3,4} = \pm \sqrt{-\frac{D_2 - \sqrt{D_2^2 - 4D_0D_4}}{2D_4}}$  двойственного уравнения  $D_0 + D_2 \tilde{\lambda}^2 + D_4 \tilde{\lambda}^4 = 0$

$$f_k = C_1 \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^k} + C_2 \frac{1}{\tilde{\lambda}_2^k} + C_3 \frac{1}{\tilde{\lambda}_3^k} + C_4 \frac{1}{\tilde{\lambda}_4^k}. \quad (13)$$

Для нахождения общих членов рядов  $M_2$  и  $M_3$  воспользуемся решением (13).

Произвольные константы  $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  найдем, решив систему линейных уравнений

$$\Lambda \mathbf{C} = \mathbf{f}$$

с матрицей  $\Lambda = [\Lambda_{ij}]_{i,j=1}^4$ ,  $\Lambda_{ij} = 1/\lambda_j^{i-1}$  и вектором-столбцом начальных условий  $\mathbf{f} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$  с единственным ненулевым компонентом  $f_2 = 1$  для ряда  $M_2$  и  $f_3 = 1$  для ряда  $M_3$ . Подставив полученные значения  $C_i$  в (13), получим следующие выражения для общих членов рядов  $M_2$  и  $M_3$

$$m_{2k} = \frac{D_0}{d} \frac{1 + (-1)^k}{2} \left[ - \left( \sqrt{\frac{2D_4}{D_2 - d}} \right)^k + \left( \sqrt{\frac{2D_4}{D_2 + d}} \right)^k \right],$$

$$m_{3k} = \frac{D_0}{d} \frac{1 - (-1)^k}{2} \left[ - \left( \sqrt{\frac{2D_4}{D_2 - d}} \right)^{k-1} + \left( \sqrt{\frac{2D_4}{D_2 + d}} \right)^{k-1} \right]$$

и замкнутой формы для самих рядов

$$M_2 = \frac{d_0}{d \partial_x^2} \left( -\text{ch}(\bar{a}_1 \partial_x y) + \text{ch}(\bar{a}_2 \partial_x y) \right),$$

$$M_3 = \frac{d_0}{d \partial_x^3} \left( -\frac{\text{sh}(\bar{a}_1 \partial_x y)}{\bar{a}_1} + \frac{\text{sh}(\bar{a}_2 \partial_x y)}{\bar{a}_2} \right), \quad (14)$$

которая получается с использованием разложения в степенные ряды гиперболических функций

$$\text{sh}(ax) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{и} \quad \text{ch}(ax) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2k}}{(2k)!}. \quad \text{В}$$

Подстановка (14) в (3) и (4) позволяет получить вид операторов МНФ для ортотропного тела в замкнутой форме

$$L_{11} = L_{44} = A_{66} \left[ (A_{22} a_1^2 + A_{12}) \cos(a_1 \partial_x y) + (-A_{22} a_2^2 - A_{12}) \cos(a_2 \partial_x y) \right] / (d),$$

$$L_{12} = L_{34} = A_{66} \left[ a_2 (-A_{12} - a_1^2 A_{22}) \sin(a_1 \partial_x y) + a_1 (A_{12} + a_2^2 A_{22}) \sin(a_2 \partial_x y) \right] / (da_1 a_2),$$

$$L_{13} = L_{24} = (A_{12} + A_{66}) \left[ \cos(a_1 \partial_x y) - \cos(a_2 \partial_x y) \right] / (d \partial_x),$$

$$L_{14} = \left[ a_2 (-A_{66} + A_{22} a_1^2) \sin(a_1 \partial_x y) + a_1 (A_{66} - A_{22} a_2^2) \sin(a_2 \partial_x y) \right] / (da_1 a_2 \partial_x),$$

$$L_{21} = L_{43} = A_{66} \left[ a_2 (-a_1^2 A_{12} - A_{11}) \sin(a_1 \partial_x y) + a_1 (a_2^2 A_{12} + A_{11}) \sin(a_2 \partial_x y) \right] / (da_1 a_2),$$

$$L_{22} = L_{33} = \left[ (A_{12} A_{66} + A_{12}^2 - A_{11} A_{22} + A_{22} A_{66} a_1^2) \cos(a_1 \partial_x y) + \right. \\ \left. + (-A_{12} A_{66} - A_{12}^2 + A_{11} A_{22} - A_{22} A_{66} a_2^2) \cos(a_2 \partial_x y) \right] / (d), \quad (15)$$

$$L_{23} = \left[ a_2 (-A_{11} + A_{66} a_1^2) \sin(a_1 \partial_x y) + a_1 (A_{11} - A_{66} a_2^2) \sin(a_2 \partial_x y) \right] / (da_1 a_2 \partial_x),$$

$$L_{31} = L_{42} = A_{66} (A_{12}^2 - A_{11} A_{22}) \left[ \cos(a_1 \partial_x y) - \cos(a_2 \partial_x y) \right] \partial_x / (d),$$

$$L_{32} = \left[ a_2 (-A_{12}^2 A_{66} - 2A_{12} A_{22} A_{66} a_1^2 + A_{11} A_{22}^2 a_1^2 - A_{12}^2 A_{22} a_1^2 - A_{22}^2 A_{66} a_1^4) \sin(a_1 \partial_x y) + \right. \\ \left. + a_1 (A_{12}^2 A_{66} + 2A_{12} A_{22} A_{66} a_2^2 - A_{11} A_{22}^2 a_2^2 + A_{12}^2 A_{22} a_2^2 + A_{22}^2 A_{66} a_2^4) \sin(a_2 \partial_x y) \right] \partial_x / (da_1 a_2),$$

представленных формулах введены обозначения

$$\bar{a}_1 = \sqrt{-\frac{2d_4}{d_2 - d}}, \quad \bar{a}_2 = \sqrt{-\frac{2d_4}{d_2 + d}}, \quad d = \sqrt{d_2^2 - 4d_0 d_4}.$$

Для ортотропного тела величины  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$  будут чисто мнимыми, так как в этом случае  $d_2 = A_{11} A_{22} - 2A_{12} A_{66} - A_{12}^2 > 0$  и  $d_2^2 - 4d_0 d_4 > 0$ , а, следовательно, подкоренные выражения указанных величин будут отрицательными. Доказать строго математически, что  $d_2 > 0$ , невозможно, однако вычислительные эксперименты с рядом ортотропных материалов, например, трехслойной березовой фанерой, склеенной бакелитовой пленкой или графитовым эпоксидом Т300/5208, показали достоверность выдвинутого предположения. При чисто мнимых значениях  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$  функции  $M_2$  и  $M_3$  будут представлены через тригонометрический синус и косинус в силу тождеств  $\text{sh}(ai) = i \sin(a)$ ,  $\text{ch}(ai) = \cos(a)$

$$M_2 = \frac{d_0}{d \partial_x^2} \left( -\cos(a_1 \partial_x y) + \cos(a_2 \partial_x y) \right),$$

$$M_3 = \frac{d_0}{d \partial_x^3} \left( -\frac{\sin(a_1 \partial_x y)}{a_1} + \frac{\sin(a_2 \partial_x y)}{a_2} \right), \quad (14)$$

$$\text{где } a_1 = \sqrt{\frac{2d_4}{d_2 - d}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{2d_4}{d_2 + d}}.$$

$$\begin{aligned}
 L_{41} &= A_{66} \left[ a_2 \left( -2A_{12}a_1^2 - A_{22}a_1^4 - A_{11} \right) \sin(a_1 \partial_x y) + a_1 \left( 2A_{12}a_1^2 + A_{22}a_1^4 + A_{11} \right) \sin(a_2 \partial_x y) \right] \partial_x / (da_1 a_2), \\
 L_{51} &= A_{66} \left( -A_{12}^2 + A_{11}A_{22} \right) \left[ a_1^2 \cos(a_1 \partial_x y) - a_2^2 \cos(a_2 \partial_x y) \right] \partial_x / (d), \\
 L_{52} &= \left[ a_2 \left( -A_{11}A_{12}A_{66} + A_{11}A_{12}A_{22}a_1^2 - A_{12}^2A_{66}a_1^2 - A_{12}^3a_1^2 - A_{11}A_{22}A_{66}a_1^2 - A_{12}A_{22}A_{66}a_1^4 \right) \sin(a_1 \partial_x y) + \right. \\
 &+ a_1 \left( A_{11}A_{12}A_{66} - A_{11}A_{12}A_{22}a_2^2 + A_{12}^2A_{66}a_2^2 + A_{12}^3a_2^2 + A_{11}A_{22}A_{66}a_2^2 + A_{12}A_{22}A_{66}a_2^4 \right) \sin(a_2 \partial_x y) \left. \right] \partial_x / (a_1 a_2 d), \\
 L_{53} &= A_{66} \left[ \left( A_{11} + A_{12}a_1^2 \right) \cos(a_1 \partial_x y) - \left( A_{11} + A_{12}a_2^2 \right) \cos(a_2 \partial_x y) \right] / (d), \\
 L_{54} &= \left[ a_2 \left( -A_{11}A_{66} + A_{11}A_{22}a_1^2 - A_{12}A_{66}a_1^2 - A_{12}^2a_1^2 \right) \sin(a_1 \partial_x y) + \right. \\
 &+ a_1 \left( A_{11}A_{66} - A_{11}A_{22}a_2^2 + A_{12}A_{66}a_2^2 + A_{12}^2a_2^2 \right) \sin(a_2 \partial_x y) \left. \right] / (a_1 a_2 d).
 \end{aligned}$$

Располагая замкнутой формой операторов МНФ, все же при вычислении их воздействия на начальные функции приходится переходить к их представлению в виде рядов Маклорена, чтобы выполнить операцию дифференцирования  $\partial_x$  над соответствующей функцией. Однако наличие замкнутой формы позволяет получить, во-первых, формулу общего члена ряда оператора МНФ, а во-вторых, и общую формулу члена ряда, получаемого после выполнения операции дифференцирования над начальной функцией, что может, в конечном счете, способствовать суммированию полученного ряда.

#### 4. Тригонометрические функции в качестве начальных функций

Если для ортотропных тел взять в качестве начальных функций следующую последовательность тригонометрических функций

$$\mathbf{U}_0^m = \{ b_m^1 c_m, b_m^2 s_m, b_m^3 s_m, b_m^4 c_m \}, \quad (16)$$

где  $s_m = \sin(\alpha_m x)$ ,  $c_m = \cos(\alpha_m x)$ ,  $\alpha_m = m\pi/a$ ,  $a$  – вещественная константа,  $m$  – целое число,  $b_m^i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) – произвольные вещественные числа, то все компоненты вектора напряженно-деформированного состояния  $\mathbf{U}^m$  также будут представлены соответствующими тригонометрическими функциями

$$\mathbf{U}^m = \{ L_m^1 c_m, L_m^2 s_m, L_m^3 s_m, L_m^4 c_m, L_m^5 s_m \}. \quad (17)$$

Здесь каждый коэффициент  $L_m^i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) представляется следующей суммой  $L_m^i = b_m^1 \tilde{L}_{i1}^m + b_m^2 \tilde{L}_{i2}^m + b_m^3 \tilde{L}_{i3}^m + b_m^4 \tilde{L}_{i4}^m$ , в которой каждая функция  $\tilde{L}_{ij}^m$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) есть результат воздействия оператора  $L_{ij}$  на тригонометрическую функцию в соответствии с основным соотношением МНФ (1):

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_{11}^m &= \tilde{L}_{44}^m = A_{66} \left[ \left( A_{22}a_1^2 + A_{12} \right) \text{ch}(a_1 \alpha_m y) + \left( -A_{22}a_2^2 - A_{12} \right) \text{ch}(a_2 \alpha_m y) \right] / (d), \\
 \tilde{L}_{12}^m &= -\tilde{L}_{34}^m = A_{66} \left[ a_2 \left( -A_{12} - a_1^2 A_{22} \right) \text{sh}(a_1 \alpha_m y) + a_1 \left( A_{12} + a_2^2 A_{22} \right) \text{sh}(a_2 \alpha_m y) \right] / (da_1 a_2), \\
 \tilde{L}_{13}^m &= -\tilde{L}_{24}^m = -\left( A_{12} + A_{66} \right) \left[ \text{ch}(a_1 \alpha_m y) - \text{ch}(a_2 \alpha_m y) \right] / (d \alpha_m), \\
 \tilde{L}_{14}^m &= \left[ a_2 \left( -A_{66} + A_{22}a_1^2 \right) \text{sh}(a_1 \alpha_m y) + a_1 \left( A_{66} - A_{22}a_2^2 \right) \text{sh}(a_2 \alpha_m y) \right] / (da_1 a_2 \alpha_m), \\
 \tilde{L}_{21}^m &= -\tilde{L}_{43}^m = -A_{66} \left[ a_2 \left( -a_1^2 A_{12} - A_{11} \right) \text{sh}(a_1 \alpha_m y) + a_1 \left( a_2^2 A_{12} + A_{11} \right) \text{sh}(a_2 \alpha_m y) \right] / (da_1 a_2), \\
 \tilde{L}_{22}^m &= \tilde{L}_{33}^m = \left( A_{12}A_{66} + A_{12}^2 - A_{11}A_{22} + A_{22}A_{66}a_1^2 \right) \left[ \text{ch}(a_1 \alpha_m y) - \text{ch}(a_2 \alpha_m y) \right] / (d), \\
 \tilde{L}_{23}^m &= \left[ a_2 \left( -A_{11} + A_{66}a_1^2 \right) \text{sh}(a_1 \alpha_m y) + a_1 \left( A_{11} - A_{66}a_2^2 \right) \text{sh}(a_2 \alpha_m y) \right] / (da_1 a_2 \alpha_m), \\
 \tilde{L}_{31}^m &= -\tilde{L}_{42}^m = -A_{66} \left( A_{12}^2 - A_{11}A_{22} \right) \left[ \text{ch}(a_1 \alpha_m y) - \text{ch}(a_2 \alpha_m y) \right] \alpha_m / (d), \\
 \tilde{L}_{32}^m &= \left[ a_2 \left( -A_{12}^2A_{66} - 2A_{12}A_{22}A_{66}a_1^2 + A_{11}A_{22}^2a_1^2 - A_{12}^2A_{22}a_1^2 - A_{22}^2A_{66}a_1^4 \right) \text{sh}(a_1 \alpha_m y) + \right. \\
 &+ a_1 \left( A_{12}^2A_{66} + 2A_{12}A_{22}A_{66}a_2^2 - A_{11}A_{22}^2a_2^2 + A_{12}^2A_{22}a_2^2 + A_{22}^2A_{66}a_2^4 \right) \text{sh}(a_2 \alpha_m y) \left. \right] \alpha_m / (da_1 a_2), \\
 \tilde{L}_{41}^m &= -A_{66} \left[ a_2 \left( -2A_{12}a_1^2 - A_{22}a_1^4 - A_{11} \right) \text{sh}(a_1 \alpha_m y) + a_1 \left( 2A_{12}a_1^2 + A_{22}a_1^4 + A_{11} \right) \text{sh}(a_2 \alpha_m y) \right] \alpha_m / (da_1 a_2), \\
 \tilde{L}_{51}^m &= -A_{66} \left( -A_{12}^2 + A_{11}A_{22} \right) \left[ \text{ch}(a_1 \alpha_m y) - \text{ch}(a_2 \alpha_m y) \right] \alpha_m / (d),
 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{52}^m = & -\left[ a_2 \left( -A_{11}A_{12}A_{66} + A_{11}A_{12}A_{22}a_1^2 - A_{12}^2A_{66}a_1^2 - A_{12}^3a_1^2 - A_{11}A_{22}A_{66}a_1^2 - A_{12}A_{22}A_{66}a_1^4 \right) \text{sh}(a_1\alpha_m y) + \right. \\ & \left. + a_1 \left( A_{11}A_{12}A_{66} - A_{11}A_{12}A_{22}a_2^2 + A_{12}^2A_{66}a_2^2 + A_{12}^3a_2^2 + A_{11}A_{22}A_{66}a_2^2 + A_{12}A_{22}A_{66}a_2^4 \right) \text{sh}(a_2\alpha_m y) \right] \alpha_m / (a_1 a_2 d), \\ \tilde{L}_{53}^m = & A_{66} \left( A_{11} + A_{12}a_1^2 \right) \left[ \text{ch}(a_1\alpha_m y) - \text{ch}(a_2\alpha_m y) \right] / (d), \\ \tilde{L}_{54}^m = & -\left[ a_2 \left( -A_{11}A_{66} + A_{11}A_{22}a_1^2 - A_{12}A_{66}a_1^2 - A_{12}^2a_1^2 \right) \text{sh}(a_1\alpha_m y) + \right. \\ & \left. + a_1 \left( A_{11}A_{66} - A_{11}A_{22}a_2^2 + A_{12}A_{66}a_2^2 + A_{12}^2a_2^2 \right) \text{sh}(a_2\alpha_m y) \right] / (a_1 a_2 d). \end{aligned}$$

Эти функции вычислены с использованием следующих равенств

$$\begin{aligned} \sin(\partial_x ay) \begin{bmatrix} s_m \\ c_m \end{bmatrix} &= \text{sh}(\alpha_m ay) \begin{bmatrix} c_m \\ -s_m \end{bmatrix}, \\ \partial_x \sin(\partial_x ay) \begin{bmatrix} s_m \\ c_m \end{bmatrix} &= \alpha_m \text{sh}(\alpha_m ay) \begin{bmatrix} -s_m \\ -c_m \end{bmatrix}, \\ \frac{\sin(\partial_x ay)}{\partial_x} \begin{bmatrix} s_m \\ c_m \end{bmatrix} &= \frac{\text{sh}(\alpha_m ay)}{\alpha_m} \begin{bmatrix} s_m \\ c_m \end{bmatrix}, \\ \cos(\partial_x ay) \begin{bmatrix} s_m \\ c_m \end{bmatrix} &= \text{ch}(\alpha_m ay) \begin{bmatrix} s_m \\ c_m \end{bmatrix}, \\ \partial_x \cos(\partial_x ay) \begin{bmatrix} s_m \\ c_m \end{bmatrix} &= \alpha_m \text{ch}(\alpha_m ay) \begin{bmatrix} c_m \\ -s_m \end{bmatrix}, \\ \frac{\cos(\partial_x ay)}{\partial_x} \begin{bmatrix} s_m \\ c_m \end{bmatrix} &= \frac{\text{ch}(\alpha_m ay)}{\alpha_m} \begin{bmatrix} -c_m \\ s_m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

которые можно вывести, если операторы их левых частей представить рядами Маклорена с последующим суммированием рядов, получаемых после выполнения операций дифференцирования  $\partial_x$  над соответствующими тригонометрическими функциями. Таким образом получено гипербола-тригонометрическое представление компонентов НДС плоской задачи для ортотропного упругого тела.

Это представление можно использовать для решения задачи периодически нагруженного слоя толщиной  $h$ . Пусть рассматриваемый слой вдоль координаты  $y$  ограничен значениями  $0 \leq y \leq h$ , по координате  $x$  бесконечен в обе стороны. На линии  $y=0$  заданы нормальное  $\sigma_y^0 = q_0 \sin(\alpha_m x)$  и касательное  $\tau_{xy}^0 = \tau_0 \cos(\alpha_m x)$  напряжения, на линии  $y=h$  также заданы нормальное  $\sigma_y^h = q_h \sin(\alpha_m x)$  и касательное  $\tau_{xy}^h = \tau_h \cos(\alpha_m x)$  напряжения. Для применения построенного представления (17) необходимо вычислить недостающие начальные функции  $u^0 = u_0 \cos(\alpha_m x)$  и  $v^0 = v_0 \sin(\alpha_m x)$ , которые оп-

ределятся из удовлетворения заданным краевым условиям на линии  $y=h$ .

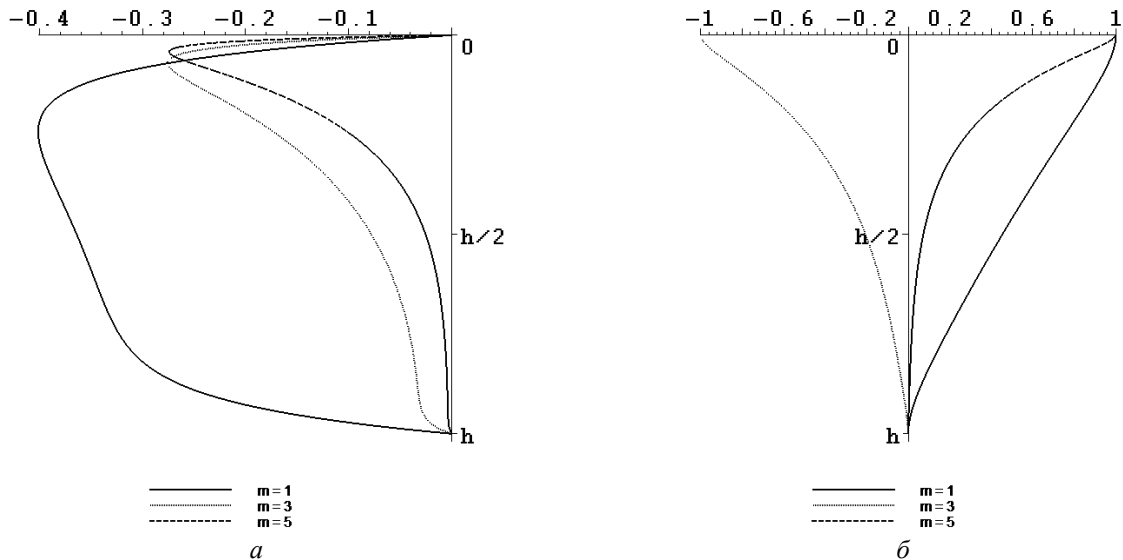
Для этого вычислим по формулам (17) соответствующие напряжения на этой линии и приравняем их заданным:

$$\begin{aligned} L_{31}u^0 + L_{32}v^0 + L_{33}\sigma_y^0 + L_{34}\tau_{xy}^0 &= \\ = \left( u_0 \tilde{L}_{31} \Big|_{y=h} + v_0 \tilde{L}_{32} \Big|_{y=h} + q_0 \tilde{L}_{33} \Big|_{y=h} + \tau_0 \tilde{L}_{34} \Big|_{y=h} \right) s_m &= \\ = q_h s_m, \\ L_{41}u^0 + L_{42}v^0 + L_{43}\sigma_y^0 + L_{44}\tau_{xy}^0 &= \\ = \left( u_0 \tilde{L}_{41} \Big|_{y=h} + v_0 \tilde{L}_{42} \Big|_{y=h} + q_0 \tilde{L}_{43} \Big|_{y=h} + \tau_0 \tilde{L}_{44} \Big|_{y=h} \right) c_m &= \\ = \tau_h c_m. \end{aligned}$$

Из этих соотношений получается система линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов в представлении начальных функций перемещений:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{31} \Big|_{y=h} u_0 + \tilde{L}_{32} \Big|_{y=h} v_0 &= q_h - \tilde{L}_{33} \Big|_{y=h} q_0 - \tilde{L}_{34} \Big|_{y=h} \tau_0 \\ \tilde{L}_{41} \Big|_{y=h} u_0 + \tilde{L}_{42} \Big|_{y=h} v_0 &= \tau_h - \tilde{L}_{43} \Big|_{y=h} q_0 - \tilde{L}_{44} \Big|_{y=h} \tau_0 \end{aligned} \quad (19)$$

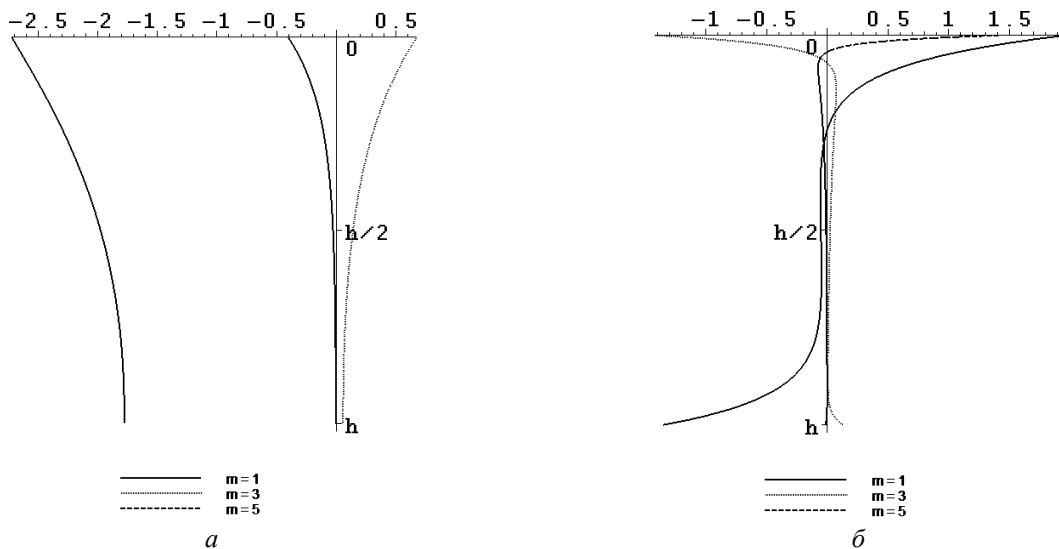
В качестве примера рассмотрим решение периодически нагруженного бесконечного слоя, изготовленного из трехслойной березовой фанеры, склеенной бакелитовой пленкой со следующими значениями технических упругих констант  $E_1 = 1,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $E_2 = 0,6 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $G = 0,07 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $\nu_1 = 0,071$ ,  $\nu_2 = 0,036$ . Упругие константы, необходимые для расчетов, вычисляются по следующим формулам:  $A_{11} = E_1 / (1 - \nu_1 \nu_2)$ ,  $A_{22} = E_2 / (1 - \nu_1 \nu_2)$ ,  $A_{12} = (E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1) / 2(1 - \nu_1 \nu_2)$ ,  $A_{66} = G$ . На линии  $y=0$  задана только нормальная нагрузка ( $\tau_0 = 0$ ), линия  $y=h$  свободна от нагрузки ( $q_h = 0$ ,  $\tau_h = 0$ ),  $a = h = 1 \text{ м}$ . Результаты расчетов напряжений и перемещений при разных значениях гармоник  $m$  нагрузки представлены на рис.1 и 2. Все расчеты выполнялись в математическом пакете Maple.



**Рис.1.** Безразмерные касательные напряжения  $\tau_{xy}/q_0$  в сечении  $x = 0$  (а) и нормальные напряжения  $\sigma_y/q_0$  в сечении  $x = a/2$  (б) при различных значениях параметра  $m$  нагрузки

Следует отметить, что, даже имея формулы для вычислений компонентов НДС, при стандартной длине мантиссы 10 удалось просчитать только результаты при  $m=1$ . При больших значениях гармоники проявилась вычислительная неустойчивость алгоритма метода начальных функций, связанная с плохой обусловленностью [4] матрицы системы (19). Для рассматриваемого случая трехслойной березовой фанеры при

$2 \leq m \leq 7$  ее число обусловленности имеет порядок  $10^8$ , а коэффициенты системы – для  $m=3$  порядка  $10^{23}$ , для  $m=5$  порядка  $10^{34}$ . Поэтому для получения достоверных результатов при  $m=3$  длину мантиссы пришлось увеличить до 22, а при  $m=5$  – до 33, так как коэффициенты системы при длине мантиссы 10 имеют погрешность порядка  $10^{12}$  и  $10^{23}$  соответственно.



**Рис.2.** Безразмерные перемещения  $vA_{11}/q_0h$  в сечении  $x = a/2$  (а) и нормальные напряжения  $\sigma_x/q_0$  в сечении  $x = a/2$  (б) при различных значениях параметра  $m$  нагрузки

Можно в Maple выполнить расчеты в точной арифметике, задавая все исходные данные в виде рациональных дробей. Однако при вычислении значений в виде вещественных чисел все равно придется увеличивать мантиссу точно так же, как и при расчетах в вещественной арифметике.

### 5. Заключение

В работе получен замкнутый вид операторов МНФ для плоской задачи ортотропного тела, а также решение через гипероло-тригонометрические функции в случае использования в качестве начальных функций тригонометрических.

Использование построенного решения продемонстрировано на примере периодически нагруженного бесконечного слоя толщиной  $h$ . Проведенный ряд вычислительных экспериментов показывает, что использование замкнутой формы операторов МНФ не снимает проблему вычислительной неустойчивости алгоритма МНФ, хотя позволяет выписать решение в явном виде.

\*\*\*\*\*

1. *Власов В.В.* Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. – М.: Стройиздат, 1975. – 223 с.

2. *Матросов А.В.* Вычислительная неустойчивость алгоритма метода начальных функций // Вест. С.-Петербург. ун-та. Сер.10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. – 2010. – Вып.4. – С.30-39.

3. *Чашкин А.В.* Лекции по дискретной математике. Учеб. пособ. – М.: Изд.МГУ, 2007. – 261 с.

4. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279 с.

## A CLOSED FORM OF THE OPERATORS OF THE METHOD OF INITIAL FUNCTIONS FOR A LINEARLY ELASTIC PLANE PROBLEM OF AN ORTHOTROPIC SOLID

A.V.Matrosov

The recurrence equation in the algorithm of the method of initial functions (MIF) is solved. This has allowed to express in a closed form the MIF operators and to solve the linearly elastic plane problem of an orthotropic solid in a hyperbolic-trigonometric form.

**Key words:** method of initial functions, boundary-value problem, computational stability.

\*\*\*\*\*

**Матросов Александр Васильевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем Санкт-Петербургского государственного университета.

E-mail: avmatrosov@mail.ru

Поступила в редакцию 15.10.2010