УДК 530.12

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ИНДУЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ. ЭВОЛЮЦИЯ КОНСТАНТ СВЯЗИ

© Ф.Ш.Зарипов

Данная работа посвящена получению самосогласованных уравнений в теории индуцированной гравитации в случае присутствия вещества в виде идеальной жидкости, взаимодействующей со скалярными полями. Проведено исследование решений этих уравнений для случая космологической модели.

Ключевые слова: гравитация, космология, индуцированная гравитация, темная энергия, конформная инвариантность, эволюция постоянных, скалярное поле.

1. Конформно-инвариантное обобщение теории струн на объекты большей размерности

Существуют аргументы [1] в пользу того, что теория физических полей должна обладать свойством конформной инвариантности, хотя бы на классическом уровне, до того момента времени, когда эта симметрия еще не нарушена. Действие для мембраны (р-браны) [1] не допускает конформных преобразований, и для этих моделей нет естественного кандидата на роль аномальной симметрии, чем является конформная симметрия для теории струн. Чтобы обойти эту трудность, оставаясь в рамках идеологии теории струн, мы предлагаем следующее обобщение теории струн

$$S_0=\frac{1}{w}\int\left\{-\frac{1}{2}\left(\nabla_\nu X,\nabla^\nu X\right)+\xi R\left(X,X\right)+\right.\\ \left.+\Lambda(X,X)^\rho\right\}\sqrt{-g}\,d^{p+1}\sigma \qquad (1)$$

где приняты обозначения: $\left(X,X\right)=X^A X^B\eta_{AB}$, $\left(\nabla_\nu X,\nabla^\nu X\right)=\nabla_\nu X^A\nabla_\mu X^B g^{\nu\mu}\eta_{AB}$, $\rho=\dfrac{p+1}{p-1}$. В действии (1) функции $X^A=X^A\left(\sigma^\mu\right)$, где $A,B=1,2,\ldots,D$; $\mu,\nu=0,1,\ldots,p$ отображают $n=p+1$-мерное многообразие Π, описываемое метрикой $g_{\mu\nu}$, в D-мерное пространство-время M с метрикой η_{AB}, где пространство M определяется метрикой Минковского с сигнатурой $(-,+,\ldots,+)$. Однако, как выясняется при детальном рассмотрении, удобнее оставлять сигнатуру M произвольной. Здесь под сигнатурой плоского пространства M понимаются знаки элементов диагональной метрической матрицы, у которой по главной диагонали стоят + или -1. R-скалярная кривизна многообразия Π, оператор ∇_ν означает ковариантную производную в многообразии Π, где символы Кристоффеля связаны с метрикой стандартным образом. Будем считать, что пространство Π параметризовано координатами σ^μ, где $\sigma^0=t$ – временная координата, а компоненты σ^i $\left(i=1,2,\ldots,p\right)$ описывают некоторый p-мерный объект, обозначим его через Γ. Величины w, $\tilde{\xi}$, Λ являются постоянными. Действие (1) обладает свойством конформной инвариантности при

$$\xi=-\frac{p-1}{8p} \qquad (2)$$

(при $n=4$, $\xi=-\dfrac{1}{12}$). Эта инвариантность выражается в том, что уравнения, получаемые за счет варьирования действия (1) по полям g и X, инвариантны относительно локального вейлевского изменения масштаба

$$g_{\mu\nu}\Rightarrow e^{2\phi}g_{\mu\nu},\ X^A\Rightarrow e^{4\xi p\phi}X^A, \qquad (3)$$

для произвольной функции $\phi=\phi\left(\sigma^\mu\right)$.

После варьирования действия (1) уравнения, соответствующие полям $\hat{X}$, $\hat{g}$, примут следующий вид:

$$\Box X^A+2\xi RX^A+2\Lambda\rho\left(X,X\right)^{\rho-1}X^A=0, \qquad (4)$$

$$T_{\alpha\beta}\equiv\frac{1}{w}\left[\left(\nabla_\alpha X,\nabla_\beta X\right)-\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu X,\nabla^\mu X\right)g_{\alpha\beta}+\right.\\ \left.+\Lambda\left(X,X\right)^\rho g_{\alpha\beta}\right]+\frac{2\xi}{w}\left[-R_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}R\,g_{\alpha\beta}+\right.\\ \left.+\nabla_\alpha\nabla_\beta-g_{\alpha\beta}\Box\right]\left(XX\right)=0, \qquad (5)$$

Если в действие добавлены функции Лагранжа других полей материи, то уравнение (5) заменится на уравнение

$$T_{(tot)\alpha\beta}\equiv T_{\alpha\beta}+T_{(e)\alpha\beta}=0 \qquad (6)$$

где $T_{\alpha\beta}$ и $T_{(e)\alpha\beta}$ – тензор энергии-импульса (ТЭИ) полей X^A и других полей материи (например, идеальной жидкости), соответственно.

В случае $\left(X,X\right)=const$ уравнения (6) и (5) подобны уравнениям Эйнштейна с эффективной гравитационной постоянной

$$G_e=-\frac{w}{16\pi\xi\left(X,X\right)}, \tag{7}$$

Отметим важный факт, что для струн ($p=1$) общее решение уравнений (5) имеет вид:

$$Bg_{\mu\nu}=\left(\nabla_\mu X,\nabla_\nu X\right)\quad \mu,\nu=\overline{0,p}, \tag{8}$$

где B – произвольная функция. Таким образом, первоначальная метрика $g_{\mu\nu}$ многообразия П связана конформным преобразованием с индуцированной на поверхности $X^A=X^A\left(\sigma^i\right)$ $\left(i=0,1,\ldots,p\right)$ метрикой $\left(\nabla_\mu X,\nabla_\nu X\right)$. При $B=const\neq 0$ $\left(B=1\right)$ уравнения (8) являются условиями вложения многообразия П в многомерное плоское пространство-время M. К сожалению, в общем случае $p>1$ при рассмотрении уравнений (4)-(5) решение (8) не является общим решением. Исследования соответствующих гамильтоновых уравнений рассматриваемой теории [2] показывают, что в случае размерности $p=2$ и $p=3$ соотношения (8), хотя бы в усеченном виде, можем рассматривать как фиксацию калибровки, в общем случае функция B не является произвольной, но в случае дополнительной симметрии, связанной космологическими решениями, мы можем зафиксировать значение $B=1$. Например, в случае $n=4\Rightarrow p=3$ дополнительные связи (калибровочные условия) можно выбрать в виде:

$$Bg_{ij}=\left(\nabla_i X,\nabla_j X\right)\ i,j=\overline{1,3},\ g^{0i}=0;\quad B=1. \tag{9}$$

В работе [2] были рассмотрены некоторое частные, космологические решения уравнений (4)-(6), (8).

2. Макроскопические уравнения

Отметим следующее утверждение: для конформно-инвариантного случая (2) след ТЭИ $T_{\alpha\beta}$ при точном выполнении уравнения (4) равняется нулю и тогда, как следует из уравнения (6), след $T_{(e)\alpha\beta}$ также равняется нулю – это означает, что возможна только материя с ультрарелятивским уравнением состояния $\varepsilon=3P$. Для рассмотрения в космологии материи с различными уравнениями состояния необходимо модифицировать рассматриваемую систему. Будем исходить из следующего предположения: конформная инвариантность нарушена за счет взаимодействия полей X^A с полями материи, и из-за такого взаимодействия в уравнениях появляются дополнительные члены. Фундаментальной основой понятия "материальные поля" будем считать спинорные поля и векторные поля, последние являются переносчиками взаимодействия. Будем также считать, что в усредненном виде ТЭИ этих полей и их взаимодействий имеет структуру ТЭИ идеальной жидкости.

$$-T^{\beta}_{(e)\alpha}=\left(P+\varepsilon\right)u_\alpha u^\beta+P\delta^\beta_\alpha, \tag{10}$$

где u_α 4 – скорости и $u_\alpha u^\alpha=-1$.

Пусть за счет взаимодействия с векторными полями уравнение (4) приобретает дополнительный член S^A:

$$\Box X^A+2\xi RX^A+2\Lambda\rho\left(X,X\right)^{\rho-1}X^A=S^A, \tag{11}$$

В данной статье конкретный вид этого члена не будем расшифровывать, а рассмотрим в самом общем виде. При всем этом будем считать, что имеет место общий закон сохранения:

$$\nabla_\beta T_{(tot)\alpha}{}^{\beta}\equiv\nabla_\beta\left(T^\beta_\alpha+T^\beta_{(e)\alpha}\right)=0. \tag{12}$$

Таким образом, рассмотрим систему уравнений (8), (6), (11), (12). Введем функцию $Y=\left(X,X\right)$. Из уравнения (11) скалярным умножением на X_A получим:

$$\Box Y-2nB+4\xi RY+4\Lambda\rho Y^\rho=2\left(S,X\right). \tag{13}$$

ТЭИ с учетом предыдущего уравнения можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} wT^\beta_\alpha &= -2\xi Y\left[R^\beta_\alpha-\frac{1}{n}R\delta^\beta_\alpha\right]+\\ &+2\xi\left[\nabla_\alpha\nabla^\beta Y-\frac{1}{n}\delta^\beta_\alpha\Box Y\right]+\\ &+\frac{1}{2n}\delta_\xi\delta^\beta_\alpha\Box Y+\frac{n-2}{2n}\left(S,X\right)\delta^\beta_\alpha-\\ &-\frac{n-2}{n}\Lambda Y^\rho\delta_\rho\delta^\beta_\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь ввели новые параметры δ_ξ и δ_ρ:

$$\xi=-\frac{n-2}{8\left(n-1\right)}-\frac{\delta_\xi}{4\left(n-1\right)};\ \rho=\frac{n}{\left(n-2\right)}+\delta_\rho,$$

характеризующие отклонение от конформно-инвариантного случая. Для размерности $n=4$: $\delta_\xi=-12\xi-1$; $\delta_\rho=\rho-2$.

Закон сохранения (12) примет вид:

$$\left(S,\nabla_\alpha X\right)+w\nabla_\beta T^\beta_{(e)\alpha}=0. \tag{15}$$

Из уравнения (13) и из дифференциального следствия условия (8) получается уравнение:

$$\nabla_\beta Y\cdot\left(\xi R+\rho\Lambda Y^{\rho-1}\right)=\left(S,\nabla_\beta X\right)+\frac{n-2}{2}\nabla_\beta B. \quad (16)$$

С учетом последнего уравнения закон сохранения перепишется в виде:

$$-\frac{n-2}{2}\nabla_\beta B+\nabla_\beta Y\cdot\left(\xi R+\rho\Lambda Y^{\rho-1}\right)+ +w\nabla_\alpha T^\alpha_{(e)\beta}=0. \quad (17)$$

След суммарного ТЭИ равняется нулю:

$$wT^\alpha_{(tot)\alpha}\equiv\delta_\xi\left[Bn-2\xi RY-2\Lambda\rho Y^\rho\right]- -4\xi(n-1)(S,X)-(n-2)\Lambda Y^\rho\delta_\rho+wT^\alpha_{(e)\alpha}=0 \quad (18)$$

Исключая член (S,X) из уравнений (13) и (18) и подставляя его в уравнения (13) и (14), получим:

$$\Box Y=\frac{n-2}{4(n-1)\xi}\left[-nB+2\xi RY+\frac{2n}{n-2}\Lambda Y^\rho\right]+ +\frac{w}{2\xi(n-1)}T^\alpha_{(e)\alpha} \quad (19)$$

$$G_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\xi Y}\left[-\frac{n-2}{2}B+\Lambda Y^\rho\right]g_{\alpha\beta}+ +\frac{1}{Y}\left[\nabla_\alpha\nabla_\beta-g_{\alpha\beta}\Box\right]Y+\frac{w}{2\xi Y}T_{(e)\alpha\beta}. \quad (20)$$

Уравнения (20) есть аналог уравнений Эйнштейна для макроскопической среды.

Таким образом, в общем случае получаются системы "макроскопических" уравнений (20), "микроскопических" (11) и уравнений связи (8), где $Y=(X,X)$. Изучение полной системы уравнений требует определения модели, т.е. определения функций S^A. В данной статье мы не будем заниматься этим вопросом, отметив лишь естественным образом возникающую гипотезу, что конкретный сектор полей $\left\{X^1,X^2,...X^k\right\}$, $k<D$ могут играть роль Хиггсовских скалярных полей теории сильных или электрослабых взаимодействий. Обратим внимание на то, что в гравитационные уравнения (20) входят лишь макроскопические функции: $Y,B,g_{\alpha\beta}$ и ТЭИ материальной среды $T_{(e)\alpha\beta}$.

Замечания:

1. *Полученные уравнения* (20), (17) *справедливы и для более общего случая, когда* B *является функцией координат многообразия.*

2. *Уравнение* (19) *является алгебраическим следствием уравнений* (20), *а уравнение* (17) – *дифференциальным следствием уравнений* (20). *Таким образом, число неизвестных больше числа независимых уравнений. Однако дополнительно задается уравнение состояния вещества и такая структура уравнений "закона сохранения"* (17), *что позволяет получить дополнительные уравнения после наложения определенных условий, связанных с уравнением состояния. Например, как следует из* (17), *после наложения калибровочного условия* $B=const$ *и если имеет место (отдельный) закон сохранения энергии для вещества* ($\nabla_\beta T^\beta_{(e)\alpha}=0$), *то возможны два случая:*

I) *При* $Y=C=const$ – *получаются уравнения Эйнштейна с космологической постоянной и эти постоянные находятся из сравнения с экспериментом.*

II) *Если* $Y\neq const$, *то из того же уравнения* (17) *следует дополнительное уравнение*

$$\xi R+\rho\Lambda Y^{\rho-1}=0. \quad (21)$$

Рассмотрим эти случаи подробнее:

I) $Y=C=const$.

Отметим также, что из $Y=C=const$, $B=const.\ \Rightarrow\ \nabla_\beta T^\beta_{(e)\alpha}=0.$

В случае $Y=C=const$. *получаем уравнения Эйнштейна с эффективной гравитационной постоянной*

$$G_e=-\frac{w}{16\pi\xi Y}, \quad (22)$$

и с космологической постоянной

$$\Lambda_e=-\frac{1}{2\xi Y}\left(-B+\Lambda Y^2\right) \quad (23)$$

– *при* $n=4;\rho=2$. *При этом уравнения* (11) *перепишутся в виде:*

$$\Box X^A-\left(-4\frac{B}{C}+\frac{w}{C}(\varepsilon-3P)\right)X^A=S^A, \quad (24)$$

– *свободные поля* ($S^A=0$) X^A *приобретают массу* μ, *где*

$$\mu^2=-4\frac{B}{C}+\frac{w}{C}(\varepsilon-3P)$$

II) $Y\neq const$, *и выполняется отдельный закон сохранения для материи:* $\nabla_\beta T^\beta_{(e)\alpha}=0.$ *В этом случае функция* Y *определяется из уравнения* (17), *если* $\Lambda\neq0$. *Из* (17) *следует уравнение*

$$\xi R+\rho\Lambda Y^{\rho-1}=0. \quad (25)$$

Уравнения (11) *перепишутся в виде:*

$$\Box X^A=S^A \quad (26)$$

– *свободные поля* ($S^A=0$) X^A *обладают нулевой массой.*

Существует еще и третий случай:

III) *Когда* $Y \neq const$, $B = const$ *и необязательно выполняется отдельный закон сохранения для материи. Этот случай является обобщением предыдущего случая. Закон сохранения принимает вид:*

$$-\nabla_{\beta} Y \cdot \left(\xi R + \rho \Lambda Y^{\rho-1}\right) = w \nabla_{\beta} T^{\beta}_{(e)\alpha}. \qquad (27)$$

2.1. Космологические решения

Рассмотрим метрическую форму многообразия Π, соответствующую однородной, изотропной космологической модели

$$ds^2 = -a^2(\eta)\left[d\eta^2 - (d\chi)^2 - K(\chi)d\Omega^2\right], \qquad (28)$$

где $K(\chi) = \left\{\sinh^2\chi; \sin^2\chi; \chi^2\right\}$ – соответственно для моделей открытого, закрытого и плоского типов. $d\Omega^2$ – метрическая форма сферы, единичного радиуса, выраженная в сферических координатах.

Полученные выше уравнения рассмотрим при $n = 4; \rho = 2; B = const > 0\,(B = 1)$.

2.1.1. Вакуумные решения

I) $Y = C = const$. Для случая вакуума ($S^A = 0$, $T_{(e)\alpha\beta} = 0$) можно аналитически решить уравнения (19), (20), (8).

На поля X^A получаются следующие уравнения

$$\Box X^A + 4\frac{B}{C}X^A = 0. \qquad (29)$$

В работе [2] найдены частные решения этих уравнений, удовлетворяющие условиям "погружения" (8). Для закрытой модели эти решения имеют вид:

$$a(t) = \sqrt{C}\cosh\left(t/\sqrt{C}\right), \qquad (30)$$

где t есть собственное время ($dt = a(\eta)d\eta$).

$$X^0 = \sqrt{C}\tan(\eta + \eta_0),$$
$$X^a = \frac{\sqrt{C}}{\cos(\eta + \eta_0)}k^a, \qquad (31)$$

где k^a – функции погружения 3 – мерной сферы

$$k^1 = \sin\chi\sin\theta\cos\phi,\ k^2 = \sin\chi\sin\theta\sin\phi,$$
$$k^3 = \sin\chi\cos\theta,\ k^4 = \cos\chi. \qquad (32)$$

Условия (8) также определяют связь между постоянными:

$$\Lambda = \frac{(3 + \delta_\xi)}{2C^2},\ \Lambda_e = \frac{3}{C}. \qquad (33)$$

Для закрытой модели константа C удовлетворяет уравнению

$$-\left(X^0\right)^2 + \left(X^1\right)^2 + \left(X^2\right)^2 + \left(X^3\right)^2 + \left(X^4\right)^2 = C. \qquad (34)$$

Для случая открытой модели возможны два случая: a) $C < 0$ пространство погружается в 5-тимерное плоское пространство с сигнатурой $(-,+,+,+,-)$, и масштабный фактор имеет вид

$$a(t) = \sqrt{|C|}\cos\left(t/\sqrt{|C|}\right), \qquad (35)$$

b) $C > 0$ – сигнатура плоского пространства - $(+,+,+,+,-)$, а масштабный фактор имеет вид

$$a(t) = \sqrt{C}\sinh\left(t/\sqrt{C}\right). \qquad (36)$$

Решения для полей X^A пространства анти-де Ситтера получаются из вышеприведенных формул (32), если в них сделать замену

$$\sin\chi \Rightarrow \sinh\chi,\ \cos\chi \Rightarrow \cosh\chi.$$

Отметим интересный, на наш взгляд, факт, что в случае $C < 0$ формула (29) определяет волновое уравнения для массивных частиц с массой $\mu = 2\sqrt{-\frac{B}{C}}$, а в случае $C > 0$ (закрытая модель) масса μ является мнимой и поля являются тахионными. При этом, если во втором случае гравитационная константа больше нуля, а в первом случае отрицательная, если значение ξ зафиксировано.

2.1.2. Случай $Y = const$, уравнения Эйнштейна при наличии вещества

Если рассмотреть присутствие идеальной жидкости, с ТЭИ

$$T_e = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}, \qquad (37)$$

то для нее в случае $Y = const$ имеет место отдельный закон сохранения

$$\partial_\eta \varepsilon + 3\frac{\partial_\eta a}{a}(\varepsilon + P) = 0,$$

а уравнение Эйнштейна имеет вид:

$$\left(\partial_\eta a\right)^2 + a^2 k = a^4\gamma + 2\varepsilon\frac{w}{C(1 + \delta_\xi)}a^4, \qquad (38)$$

где

$$\gamma = \frac{2}{1 + \delta_\xi}\left(\Lambda C - \frac{B}{C}\right);$$

$k = \{1; -1; 0\}$ соответственно для закрытого, открытого типов пространства.

Как уже было отмечено выше, если "забыть" о уравнениях (11) и (8), то оставшиеся уравнения (20) в случае $Y = const$ полностью совпадают с уравнениями Эйнштейна. Перейдем к безразмерным переменным

$$x=\frac{t}{t_0};\ b=b(x)=\frac{a(x)}{t_0};\ \tilde{C}=\frac{C}{t_0^2},\qquad (39)$$
$$\lambda=\lambda(x)=\frac{\dot{b}}{b}$$

где t – собственное время наблюдателя ($dt=a(\eta)\cdot d\eta$), t_0 – некоторый масштаб, равный рассматриваемому значению возраста Вселенной, точка означает производную по x. Тогда уравнение (38) примет вид:

$$\lambda^2=-\frac{k}{b^2}+\tilde{\gamma}+2\varepsilon\frac{w}{\tilde{C}(1+\delta_\xi)},\qquad (40)$$

где $\tilde{\gamma}=\gamma t_0^2$.

Для предполагаемого значения возраста Вселенной $t_0\sim 13.7 mlrd.l\sim 1.3\cdot 10^{28}cm$, "постоянная Хаббла" $H=\lambda t_0^{-1}\sim 71 km/mpk\cdot c\sim$ $\sim 7.7\cdot 10^{-29}cm^{-1}\Rightarrow\lambda_0\sim 0.9963$.

Имеются основания считать, что открытая астрономами [3], [4] так называемая "темная энергия" есть энергия вакуума, для описания которой используется Λ-член [5]. Используем общепринятое значение баланса энергии, где "темная энергия" обусловлена "космологической постоянной" и ей приходится около 0.73 доли энергии:

$$\tilde{\gamma}=0,73\lambda_0^2\qquad (41)$$

Гравитационная постоянная

$$G_e=-\frac{w}{16\pi\xi C}=2,510^{-66}cm^2,\qquad (42)$$

Неизвестными являются параметры C, w, Λ, ξ. Параметр ξ можно положить равным к значению близкому к конформно-инвариантному значению $\xi_0=-1/12\Leftrightarrow\delta\xi=0$. Для вышеприведенных решений (случай пространства Де Ситтера), когда выполняется соотношение (33), получаем, что $C=2,33\cdot 10^{56}cm^2$, $w=w_0=2.44\cdot 10^{-9}cm^4$. Параметру w_0 соответствуют расстояния порядка $l_w=\sqrt[4]{w_0}\sim 0.007cm$. Это расстояние очень большое для теории, приводящей к планковским расстояниям ($\sim 10^{-33}cm$). Из (33) следует, что $\Lambda=2.7576\cdot 10^{-113}cm^{-4}$. Отметим, что если взять значение $\delta\xi=-3$, то получим $\Lambda=0$, при тех же значениях остальных параметров. Полученные значения постоянных, хотя и соответствуют своим экспериментальным (современным) значениям, однако, во первых, не годятся для описания инфляционной модели – слишком большое значение C определят в решениях (35), (36) большое время раздувания. Для того чтобы наша модель описывала как темную энергию, так и инфляцию при малых временах, необходимо предположить, что параметры теории эволюционировали во времени.

2.1.3. Случай $Y\neq const$

Рассмотрим некоторое обобщение уравнения (21), используя закон сохранения (17), записанного в виде (27), исходя из предположения, что между полем Y (полями X^A) и веществом могут происходить обменные процессы, которые приводят к тому, что имеет место сохранения лишь полной энергии.

$$\partial_\eta Y\cdot(\xi R+2\Lambda Y)=-w\left[\partial_\eta\varepsilon+3\frac{\partial_\eta a}{a}(\varepsilon+P)\right],\qquad (43)$$
$$R=\frac{6}{a^3}\left(\partial_\eta^2 a+ak\right).$$

Рассмотрим широко известные в космологии уравнения состояния вещества:

1) $\varepsilon_r=3P_r$ – случай ультрарелятивистского вещества (излучения). $\varepsilon_r=\left(\varepsilon_{r0}+Yf_{r1}+Y^2f_{r2}\right)/a^4$. Первый член этого выражения дает плотность энергии "свободного" ультрарелятивистского вещества, а остальные два члена описывают взаимодействие этого вещества с полем Y, если такое взаимодействие существует (если нет, то коэффициенты f_{r1}, f_{r2} равны к нулю). Здесь и в дальнейшем предполагаем, что плотность энергии взаимодействия разложимо в ряд по Y. ε_{r0}, f_{r1}, f_{r2} – некоторые постоянные.

Аналогично, для других случаев уравнения состояния получим:

2) $\varepsilon_v=P_v$ – "сверхжесткое" уравнение состояния, характерное для массивных векторных полей. $\varepsilon_v=\left(\varepsilon_{v0}+Yf_{v1}+Y^2f_{v2}\right)/a^6$, $\{f_{v1},f_{v2},\varepsilon_{v0}\}=const$.

3) $\varepsilon_\Lambda=-P_\Lambda$ – "вакуумное" уравнение состояния $\Rightarrow$

$$\varepsilon_\Lambda=\gamma_\lambda/w-B\delta_\xi/w+Yf_{\Lambda 1}+f_{\Lambda 2}Y^2,$$

где $f_{\Lambda 1},f_{\Lambda 2},\gamma_\lambda$ – постоянные. Здесь отдельно выделен член $-B\delta_\xi/w$. Этот член появляется даже в случае отсутствия взаимодействия ($S=0$).

4) $P=0$ – случай пылевидной материи. $\Rightarrow$

$$\varepsilon_p=\left(\varepsilon_{p0}+Yf_{p1}+Y^2f_{p2}\right)/a^3$$

Таким образом, суммируя, для модельной теории положим:

$$\varepsilon=\left(\gamma_\lambda/w-B\delta_\xi/w+\varepsilon_{r0}/a^4+\varepsilon_{p0}/a^3+\varepsilon_{v0}/a^6\right)+\qquad (44)$$

$$+\left[\left(Yf_{r1}+Y^2f_{r2}\right)/a^4+Yf_{\Lambda 1}+f_{\Lambda 2}Y^2+\right.$$
$$\left.+\left(+Yf_{p1}+Y^2f_{p2}\right)/a^3+\left(Yf_{v1}+Y^2f_{v2}\right)/a^6\right].$$
$$P=-\gamma_\lambda/w+B\delta_\xi/w+\varepsilon_{r0}/3a^4+\varepsilon_{v0}/a^6+$$
$$+\left[\left(Yf_{r1}+Y^2f_{r2}\right)/3a^4+\left(Yf_{v1}+Y^2f_{v2}\right)/a^6-\right.\qquad(45)$$
$$\left.-Yf_{\Lambda 1}-f_{\Lambda 2}Y^2\right].$$

Тогда уравнение (43) примет вид:

$$\xi R+2\Lambda Y=-w\left(\left(f_{r1}+2Yf_{r2}\right)/a^4+f_{\Lambda 1}+\right.$$
$$\left.+2f_{\Lambda 2}Y+\left(f_{p1}+2Yf_{p2}\right)/a^3+\left(f_{v1}+2Yf_{v2}\right)/a^6\right)\qquad(46)$$

или

$$\xi R=-2Y\left[\Lambda+w\left(f_{\Lambda 2}+\frac{f_{p2}}{a^3}+\frac{f_{r2}}{a^4}+\frac{f_{v2}}{a^6}\right)\right]-$$
$$-w\left(f_{\Lambda 1}+\frac{f_{p1}}{a^3}+\frac{f_{r1}}{a^4}+\frac{f_{v1}}{a^6}\right)\qquad(47)$$

Уравнение Эйнштейна примет вид:

$$\left(\partial_\eta a\right)^2+a^2k=-\partial_\eta a\cdot a\frac{\partial_\eta Y}{Y}+$$
$$+\frac{a^4}{6\xi}\left(\frac{B}{Y}-\Lambda Y\right)-\frac{w}{6\xi Y}a^4\varepsilon,\qquad(48)$$

Для компьютерного моделирования решений уравнений (47), (48) перейдем к безразмерным переменным

$$x=\frac{t}{t_0};\ b=b(x)=\frac{a(x)}{t_0};$$
$$Z=Z(x)=\frac{Y(x)}{t_0^2},\ \lambda=\lambda(x)=\frac{\dot b}{b}\qquad(49)$$

где t – собственное время наблюдателя ($dt=a(\eta)\cdot d\eta$), точка означает производную по x. Тогда уравнения (48),(47) примут вид:

$$\lambda^2=-\frac{\dot Z}{Z}\lambda-\frac{k}{b^2}-\frac{1}{6\xi}\left[Z\left(\tilde\Lambda+wF_2\right)+wF\right]_1-$$
$$-\frac{w}{6\xi Z}\left(\frac{12B\xi}{w}+E\right),\qquad(50)$$

$$\dot\lambda=-2\lambda^2-\frac{k}{b^2}-\frac{1}{3\xi}Z\left(\tilde\Lambda+wF_2\right)-\frac{w}{6\xi}F_1.\qquad(51)$$

Последнее уравнение (с учетом предыдущего) можно переписать в виде:

$$\dot\lambda=\frac{k}{b^2}+\frac{4B}{Z}+\frac{w}{3\xi Z}E+\frac{w}{6\xi}F_1+\frac{2\dot Z}{Z}\lambda.\qquad(52)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения:

$$\tilde\Lambda=\Lambda t_0^4+f_{\Lambda 2}w;\ \ F_2=\frac{\tilde f_{p2}}{b^3}+\frac{f_{r2}}{b^4}+\frac{\tilde f_{v2}}{b^6};$$
$$F_1=\tilde f_{\Lambda 1}+\frac{\tilde f_{p1}}{b^3}+\frac{\tilde f_{r1}}{b^4}+\frac{\tilde f_{v1}}{b^6};$$
$$E=\gamma_\lambda/w+\tilde\varepsilon_{p0}/b^3+\tilde\varepsilon_{r0}/b^4+\tilde\varepsilon_{v0}/b^6;$$

а также перепараметризовали постоянные с учетом их размерностей

$$\tilde\varepsilon_{p0}=\varepsilon_{p0}/t_0^3,\ \tilde\varepsilon_{r0}=\varepsilon_{r0}/t_0^4,\ \tilde\varepsilon_{v0}=\varepsilon_{v0}/t_0^6;$$
$$\tilde f_{\Lambda 1}=f_{\Lambda 1}t_0^2,\ \tilde f_{p1}=f_{p1}/t_0,\ \tilde f_{r1}=f_{r1}/t_0^2,\ \tilde f_{v1}=f_{v1}/t_0^4;$$
$$\tilde f_{p2}=f_{p2}t_0,\ \tilde f_{v2}=f_{v2}/t_0^2.$$

Интересно сравнить уравнения, полученные из (50), (52), если в эти уравнения подставить $Y=const=C$, с уравнениями Эйнштейна с тем же ТЭИ, имеющими вид:

$$\lambda^2+\frac{k}{b^2}=\gamma t_0^2+\frac{8\pi}{3}G_e t_0^2\varepsilon,$$
$$\dot\lambda=\frac{k}{b^2}-4\pi G_e\,t_0^2\left(\varepsilon+P\right),$$

где $G_e=-\dfrac{w}{16\pi\xi C},\ \gamma=-\dfrac{1}{6\xi}\left(-B/C+\Lambda C\right).$

Первые из этих уравнений совпадают, а вторые уравнения отличаются (напомним, что в случае уравнений Эйнштейна второе из уравнений является дифференциальным следствием первого). В объединенной (правильной) форме уравнение (52) имеет вид:

$$\dot Z\left(-\dot\lambda+\frac{k}{b^2}+\frac{4B}{Z}+\frac{w}{3\xi Z}E+\frac{w}{6\xi}F_1+\frac{2\dot Z}{Z}\right)=0.\qquad(53)$$

Происходит разветвление дифференциальных уравнений следующего вида:

1) Если существует решение $Y=const\equiv C$, то возникает уравнение Эйнштейна – одно уравнение на одну неизвестную (на масштабный фактор), при этом уравнение (52) исчезает в связи с тем, что $\dfrac{dZ}{dt}=0$;

2) Если существует решение $Y\neq const$, то возникают два уравнения на две неизвестные переменные: на масштабный фактор $b(t)$ и на функцию $Z(t)$.

Существует проблема сшивки двух решений $Y=const\equiv C_0$ и $Y\neq const$, а также уравнение (52) может содержать решения, когда $Y=const\equiv C_1\neq C_0$. Тогда возникает проблема описания эволюции постоянных - нахождения решений переводящих C_0 в C_1. Эта ситуация напоминает фазовый переход, который интересен и тем , что в рассматриваемой теории реализуется принцип Маха: мировые постоянные (через переменную Z) зависят от уравнения состояния и возможно от распределения материи во Вселенной.

Вначале проанализируем решения полученных уравнений в более простых случаях.

2.1.4. Случай $Y \neq const$ и $S = 0$

Рассмотрим частный случай полученных уравнений, когда

$$S = 0, Y \neq const.$$

На поля X^A получаются следующие уравнения

$$\Box X^A = 0,$$

Как следует из вывода уравнений, в этом случае возможно только присутствие материи в виде идеальной жидкости с уравнением состояния

$$\varepsilon - 3P = -4\frac{B\delta_\xi}{\omega}$$

и

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{r0}}{a^4} - \frac{B\delta_\xi}{\omega},$$

где $\varepsilon_{r0} = const$ и при $\delta_\xi = 0$ реализуется конформная инвариантность.

Тогда уравнения (48), (51) можно свести к следующим уравнениям:

$$\lambda^2 = -\frac{\dot{Z}}{Z}\lambda - \frac{k}{b^2} - \frac{1}{6\xi}Z\tilde{\Lambda} - \frac{2B}{Z} - \frac{w_\varepsilon}{6\xi Z b^4}, \qquad (54)$$

$$\dot{\lambda} = -2\lambda^2 - \frac{k}{b^2} - \frac{1}{3\xi}Z\tilde{\Lambda}, \qquad (55)$$

где введен безразмерный параметр: $\omega_\varepsilon = \omega\varepsilon_{r0}/t_0^4$.

Точка означает производную по переменной $x = \dfrac{t}{t_0}$. t_0 – характерный масштаб порядка возраста Вселенной. Рассматривались решения этой системы дифференциальных уравнений с использованием пакета "maple".

1) Гравитационная постоянная

$$G_e = -\frac{w}{16\pi\xi Y_0} = 2,510^{-66}\,cm^2,$$

2) Для предполагаемого значения возраста Вселенной

$$t_0 \sim 13.7\,mlrd.l \sim 1.3\cdot 10^{28}\,cm,$$

"постоянная Хаббла"

$$H = \lambda t_0^{-1} \sim 71 km/mpk\cdot c \sim 7.7\cdot 10^{-29}\,cm^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_0 \sim 0.9963.$$

3) Используем общепринятое значение баланса энергии, где "космологической постоянной" приходится около 0,73 доли

$$-\frac{1}{6\xi}[\tilde{\Lambda}Z_0 - (1+\delta_\xi)/Z_0] = 0,73\lambda_0^2.$$

4) Из сравнения с теорией $V(\varphi) \sim \Lambda_\varphi \varphi^4/4$, где требование на относительную малость амплитуды возмущений в этой теории приводит к значению $\Lambda_\varphi \sim 10^{-14}$ нашей теории приводит к соотношению $4\Lambda w \sim 10^{-14}$, или $4\tilde{\Lambda}w \sim 10^{-14}t_0^4 \sim 10^{98}$.

Для значения параметра $\delta_\xi = 0,0001$, близкого к конформно инвариантному случаю, вычислим:

$$Z_0 = 2,4761\cdot 10^{-107} \rightarrow Y_0 = 4,1723\cdot 10^{-51}\,cm^2,$$

$$\Lambda = 5,7450\cdot 10^{100}\,cm^{-4} \rightarrow \tilde{\Lambda}Z_0 = 4,0390\cdot 10^{106}.$$

$$w = 4,3516\cdot 10^{-116}\,cm^4 \rightarrow L_w \sim 1,4\cdot 10^{-29}\,cm \rightarrow$$

$$\rightarrow E_w \sim 1,4\cdot 10^{15}\,Gev.$$

Обозначим через e_{gr}, e_w, e_y, e_{cosm}, e_{Lam} соответственно масштабы энергии гравитационной постоянной, затравочной постоянной w, "среднего поля" Y, космологической постоянной, постоянной самодействия Λ. После компьютерных вычислений получим:

$$e_{gr} \sim 10^{19}\,Gev,$$

$$e_w = 1.366957989563888032600090426332290276931233886704460664\cdot 10^{15}\,Gev,$$

$$e_y = 3.056534576613346540220033391155468670062894983476882788\,1\cdot 10^{11}\,Gev,$$

$$e_{cosm} = 2.3649750099011382949455051779710959678009943428309 97\cdot 10^{-12}\,Gev.$$

$$e_{Lam} = 3.056610987051301743918824237608534812317558373983235 5\cdot 10^{11}\,Gev,$$

Большие порядки вычислений приведены лишь для того, чтобы подчеркнуть, что "космологическая постоянная" получается за счет сокращения (разности) двух больших величин (10^{108}-го порядка).

Здесь w и Λ являются первоначальными постоянными, поэтому если подставить найденное значение для Λ в решение $Y = C = const$ для модели де Ситтера, где связь между параметрами определяется формулой (33), то получим $C_0 = 5.1090\cdot 10^{-51}\,cm^2$, что очень близко к значению Y_0, которое было вычислено исходя из современных экспериментальных данных, правда, без учета материи. В случае решения пространства Де-Ситтера реализуется сценарий раздувающейся Вселенной, где постоянная Хаббла $H_0 \sim \frac{1}{\sqrt{C_0}} \sim 10^{25} cm^{-1} \sim$ $\sim 3 \cdot 10^{35} c^{-1}$, во втором случае постоянная Хаббла $H_1 \sim 7.7 \cdot 10^{-29} cm^{-1}$ имеет современное значение; хотя за время жизни Вселенной параметр Y уменьшается всего на 18% относительно параметра C_0.

Таким образом, можно предположить, что в начальный момент космологического сценария реализовывалась инфляционная модель, а затем за счет небольшого изменения "мирового" параметра Y, которое привело к сдвигу гравитационной "постоянной" и огромному уменьшению космологической "постоянной", инфляционная стадия перешла в фазу медленного раздувания.

1) Таким образом, в рассматриваемой теории возникает индуцированная гравитация с космологической постоянной. Эта теория гравитация в частном случае может совпадать с теорией гравитации Эйнштейна, где гравитационная космологические постоянные индуцируется некоторым макроскопическим скалярным полем. А также может и не совпадать за счет того, что это скалярное поле может эволюционировать во времени;

2) Теория может включать в себя вещество, жестко связанное с этим скалярным полем (для которого по отдельности не выполняется закон сохранения энергии).

Интересно отметить, что эти решения описывают эволюцию Вселенной, когда величины $(X,X), G_e, \Lambda_e$ являются функциями времени. Как следует из анализа численных решений уравнений, эволюцию можно разделить на четыре этапа. Первый этап осуществляется при малых t – это стадия быстрого раздувания; во втором этапе более замедленное изменение масштабного фактора до времен порядка $t \sim 10^{28} c$; третий этап – это стадия квазидеситтера, когда функция H является медленно убывающей функцией, и, наконец, четвертый этап – $t \sim 2.5 \cdot 10^{28} c$ – это, когда функция (X,X) быстро (катастрофический) спадает до нуля, а при этом масштабный фактор стремится к нулю.

* * * * * * * * * *

1. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн: в 2 т. – М.: Мир, 1990. – Т.1 – 518 с., Т.2 – 656 с.
2. *Zaripov F.Sh.* A conformally invariant generalization of string theory/yyto higher-dimensional objects/yy Hierarchy of coupling constants // Gravitation and Cosmology. – 2007. – Vol.13. – No.4 .
3. *Riess A.G.* et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // Astronomical Journal. – 1998. – Vol.116. – P.1009-1038.
4. *Perlmutter S.* et al. Measuring cosmology with Supernovae // Astrophys. Journal. – 1999. – P.517-565.
5. *Spergel D.N.* et al. Some issues concerning holographic dark energy, astro-ph/0603451 // Astrophys. Journal. – 2007. – P.170-288.

GENERALIZED EQUATIONS IN THE THEORY OF INDUCED GRAVITATION. THE EVOLUTION OF THE TIE CONSTANTS

F.Sh.Zaripov

The present article continues the author's investigations on the conformal invariant generalization of the string theory for the objects of the dimension bigger than two [2]. In this work the self-consistent equations in the theory of induced gravitation is obtained. It is assumed that there is a perfect liquid interacted with the scalar fields within the framework of the considered theory.

Key words: gravitation, cosmology, induced gravitation, conformal invariant, constant evolution, dark energy, scalar field.

* * * * * * * * * *

Зарипов Фархат Шаукатович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и математического моделирования Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: farhat_zaripov@mail.ru

Поступила в редакцию 02.11.2010