УДК 511.61

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АБЕЛЕВЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

© Л.И.Галиева, И.Г.Галяутдинов, Е.Е.Лаврентьева

В статье показывается, что минимальные многочлены $p_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ алгебраических чисел вида $\cos\frac{\pi}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) образуют класс абелевых многочленов; строится группа Галуа $G(p_{13})$ многочлена $p_{13}(x)$ и находится его разложение на два множителя над полем, соответствующим подгруппе индекса 2 группы $G(p_{13})$.

Ключевые слова: абелевы многочлены, резольвента Галуа, группа Галуа.

1. Вычисление группы Галуа для явно заданного многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ требует больших усилий даже при использовании компьютера. "Причина трудностей отчасти обусловлена доказанным Ван дер Варденом (1933) фактом, согласно которому "почти все" многочлены степени *n* имеют S_n в качестве своей группы Галуа над $\mathbb{Q}$" [1: 252]. В связи с этим уместно напомнить слова самого Э.Галуа, который отмечал, что при исследовании разрешимости в радикалах произвольных уравнений "требуемые вычисления практически не выполнимы" [2: 59]. Именно поэтому особый интерес представляют многочлены, для которых группа Галуа вычисляется сравнительно несложно. В качестве примера таких многочленов в математической литературе приводятся лишь круговые (циклотомические) многочлены [1: 213; 3: 202].

В данной работе предлагается метод построения группы Галуа для нового класса многочленов: рассматриваются минимальные многочлены $p_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ алгебраических чисел вида $\cos\frac{\pi}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$; доказывается, что они являются абелевыми. Группа Галуа вычисляется для многочлена $p_{13}(x)$, корнями которого являются числа $\cos\frac{s\pi}{13}$, где s =1, 3, 5, 7, 9, 11.

2. Приведем некоторые факты из теории Галуа [4: 199]. Пусть K – поле нулевой характеристики, α – корень многочлена $p(x)$, неприводимого в кольце $K[x]$. Тогда поле $L = K(\alpha)$ является конечным расширением поля K и его степень равна степени многочлена $p(x)$, т.е. $[L:K] = \deg p(x)$. Автоморфизмы поля L, оставляющие на месте элементы поля K, называются автоморфизмами расширения L/K и образуют группу относительно умножения. Эту группу обычно обозначают $Aut(L/K)$. Всякий автоморфизм $\tau \in Aut(L/K)$ однозначно определяется тем, куда он переводит элемент α.

Вместе с тем автоморфизм τ корень α многочлена $p(x)$ переводит в корень этого же многочлена. Отсюда следует, что $|Aut(L/K)| \le \deg p(x) = [L:K]$. В том случае, когда корни многочлена $p(x)$ рационально не выражаются через α, $Aut(L/K)$ будет состоять только из единичного автоморфизма. Например, корнями многочлена $p(x) = x^3 - 2$ являются числа $x_1 = \sqrt[3]{2} = \alpha$, $x_2 = \varepsilon\alpha$, $x_3 = \varepsilon^2\alpha$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Расширение $\mathbb{Q}(\alpha)$ не содержит других корней многочлена $p(x)$, кроме α, т.е. два других корня многочлена $p(x)$ через α рационально не выражаются. Значит, группа $Aut(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ состоит только из единичного автоморфизма и $|Aut(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})| = 1$. Здесь заметим, что в качестве α можно взять любой корень многочлена $p(x)$.

В то же время имеется класс многочленов, для которых $|Aut(L/K)| = [L:K]$. В этом случае расширение $L(\alpha)$ называют расширением Галуа. Если расширение $L = K(\alpha)$ не является расширением Галуа, т.е. $|Aut(L/K)| < [L:K]$, то его можно включить в некоторое расширение Галуа $\overline{L}/K$. Для этого к расширению L нужно последовательно присоединять корни многочлена

$p(x)$ до тех пор, пока не получится расширение $\overline{L}$, содержащее все корни многочлена $p(x)$.

Группой Галуа расширения Галуа $\overline{L}/K$ называется его группа автоморфизмов $Aut(\overline{L}/K)$. Группой Галуа конечного расширения L/K называется группа Галуа наименьшего расширения Галуа $\overline{L}/K$, содержащего L/K. Группой Галуа неприводимого многочлена $p(x)\in K[x]$ называется группа Галуа расширения $K(\alpha)$, где α – корень многочлена $p(x)$.

3. Приведенную теорию применим к построению расширения Галуа и группы Галуа многочлена $p(x)=x^3-2$. Как было отмечено, в расширение $L=\mathbb{Q}(\alpha)$, где $\alpha=x_1=\sqrt[3]{2}$, не входят корни $x_2=\varepsilon\alpha$, $x_3=\varepsilon^2\alpha$. Найдем расширение $L(x_2)=\mathbb{Q}(\alpha,\varepsilon\alpha)=\mathbb{Q}(\alpha,\varepsilon)=\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$, где $\beta=i\sqrt{3}$. Это расширение содержит все корни многочлена $p(x)$, поэтому оно является искомым расширением $\overline{L}=L(x_2)$. Очевидно, что $\mathbb{Q}\subset L\subset\overline{L}$, причем $[L:\mathbb{Q}]=3$, $[\overline{L}:L]=2$, $[\overline{L}:\mathbb{Q}]=6$. Убедимся теперь, что расширение $\overline{L}/\mathbb{Q}$ является расширением Галуа. По теореме о примитивном элементе [5: 212] имеем, что $\overline{L}=\mathbb{Q}(v)$, где в качестве v можно взять число $v=\alpha+\beta$. Найдем минимальный многочлен этого числа. Имеем $v-\beta=\alpha$. Возведя обе части этого равенства в третью степень, получаем $v^3-3v^2\beta+3v\beta^2-\beta^3=\alpha^3$. Отсюда, с учетом того, что $\alpha^3=2$, $\beta^2=-3$, приходим к равенству $v^3-3\beta v^2-9v+3\beta=2$. Тогда $\beta=\dfrac{v^3-9v-2}{3v^2-3}$ и $(-3)(3v^2-3)^2=(v^3-9v-2)^2$. Отсюда имеем $v^6+9v^4-4v^3+27v^2+36v+31=0$.

Таким образом, найден многочлен $\varphi(x)=x^6+9x^4-4x^3+27x^2+36x+31$, корнем которого является число v. Для того чтобы найти все его корни, нужно иметь в виду, что в качестве α можно взять любой корень многочлена $p(x)=x^3-2$, а в качестве β – любой корень многочлена $g(y)=y^2+3$. Поэтому корнями многочлена $\varphi(x)$ являются числа вида $x_i+y_j, i=1,2,3; j=1,2$, т.е. $v_1=v=x_1+y_1=\alpha+\beta$, $v_2=x_1+y_2=\alpha-\beta$, $v_3=x_2+y_1=\varepsilon\alpha+\beta$, $v_4=x_2+y_2=\varepsilon\alpha-\beta$, $v_5=x_3+y_1=\varepsilon^2\alpha+\beta$, $v_6=x_3+y_2=\varepsilon^2\alpha-\beta$. Убедимся в том, что многочлен $\varphi(x)$ является неприводимым над полем $\mathbb{Q}$. Так как этот многочлен не имеет рациональных корней, то у него в кольце $\mathbb{Q}[x]$ не будет делителя первой степени, но над полем $L=\mathbb{Q}(\alpha)$ он имеет разложение $\varphi(x)=(x^2-2\alpha x+\alpha^2+3)\times(x^4+2\alpha x^3+$ $+(3\alpha^2+6)x^2+(6\alpha+4)x-3\alpha^2+2\alpha+9)$. Из единственности разложения многочлена на неприводимые множители над любым полем и условия $\mathbb{Q}[x]\subset L[x]$ следует, что многочлен $\varphi(x)$ не имеет в кольце $\mathbb{Q}[x]$ делителей и второй степени. Аналогично, в силу разложения $\varphi(x)=(x^3-3\beta x^2-9x+3\beta-2)\times(x^3+3\beta x^2-9x-$ $-3\beta-2)$ над полем $\mathbb{Q}(\beta)$, получаем, что многочлен $\varphi(x)$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$ не может иметь делителей третьей степени. Из всего этого вытекает, что многочлен $\varphi(x)=x^6+9x^4-4x^3+27x^2+$ $+36x+31$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

Любой автоморфизм расширения $\overline{L}=\mathbb{Q}(v)$ определяется тем, куда он переводит $v_1=\alpha+\beta$. Так как $\tau_k(v_1)=v_k, k=1,2,3,4,5,6,$ то $|Aut(\overline{L}/\mathbb{Q})|=6$. Значит, $\left|Aut(\overline{L}/\mathbb{Q})\right|=[\overline{L}:\mathbb{Q}]$. Отсюда следует, что $\overline{L}/\mathbb{Q}$ является расширением Галуа.

Убедимся, что многочлен $\varphi(x)=x^6+9x^4-$ $-4x^3+27x^2+36x+31$ является резольвентой Галуа многочлена $p(x)=x^3-2$. Резольвентой Галуа многочлена $p(x)$ называется такой неприводимый над данным полем многочлен $\varphi(x)$, что в результате присоединения одного из его корней к этому полю получается поле, содержащее все корни многочлена $p(x)$ (6: 375).

Из равенства $\beta=\dfrac{v^3-9v-2}{3v^2-3}$, приведенного ранее, следует, что β рационально выражается через v. Тогда и $\alpha=v-\beta$ будет рационально выражаться через v. Это означает, что $\alpha,\varepsilon\alpha,\varepsilon^2\alpha\in\mathbb{Q}(v)$, то есть все корни многочлена $p(x)$ содержатся в расширении, полученном присоединением к полю $\mathbb{Q}$ одного корня $v=\alpha+\beta$ многочлена $\varphi(x)$, что и нужно было показать.

Построим теперь группу Галуа $G(p)$ многочлена $p(x)$, изоморфную группе Галуа $G(\varphi)=Aut(\overline{L}/\mathbb{Q})=\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6\}$. Из условия $\tau_1(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$, следует, что $\tau_1(\alpha)=\alpha$, $\tau_1(\beta)=\beta$, т.е. автоморфизму τ_1 соответствует единичная подстановка. Поэтому с точностью до изоморфизма можем записать $\tau_1=(1)$. Так как $\tau_2(\alpha+\beta)=\alpha-\beta$, то $\tau_2(\alpha)=\alpha$, $\tau_2(\beta)=-\beta$. Поэтому $\tau_2(\varepsilon\alpha)=\varepsilon^2\alpha$, $\tau_2(\varepsilon^2\alpha)=\varepsilon\alpha$. Значит, $\tau_2=(2,3)$. Аналогично находим, что $\tau_3=(1,2,3)$, $\tau_4=(1,2)$, $\tau_5=(1,3,2)$, $\tau_6=(1,3)$.

Таким образом, группой Галуа $G(p)$ многочлена $p(x)=x^3-2$ является вся симметрическая группа подстановок третьей степени, то есть S_3. И в общем случае, если $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$, $\deg f(x)=n$ и между корнями многочлена $f(x)$ нет рациональных связей, то его группой Галуа будет группа подстановок S_n. Поэтому при $n\geq 5$ уравнение $f(x)=0$ окажется неразрешимой в радикалах.

4. Имеются многочлены, которые являются своей резольвентой Галуа. Присоединение одного корня такого многочлена к основному полю создает расширение Галуа. Такими многочленами, в частности, являются абелевы многочлены.

Многочлен $f(x)$, неприводимый над полем K, называется абелевым, если его корни имеют вид $x_1,\theta_2(x_1),\theta_3(x_1),...,\theta_n(x_1)$, где $\theta_i(x)$ такие рациональные функции, что $\theta_i(\theta_j(x_1))=\theta_j(\theta_i(x_1))$ [5: 229].

В работах [7; 8] изучены многочлены $p_n(x)$ ($n\in\mathbb{N}$), обладающие свойствами: 1) $\deg p_n(x)=\varphi(n)$ при n четном и $\deg p_n(x)=\frac{1}{2}\varphi(n)$, если n – нечетно (здесь $\varphi(n)$ – функция Эйлера), 2) Корнями многочлена $p_n(x)$ являются числа $\cos\frac{k\pi}{n}$, где k – нечетно и НОД$(k,n)=1$, 3) Многочлены $p_n(x)$ имеют целые коэффициенты и неприводимы над полем $\mathbb{Q}$.

Нетрудно убедиться в том, что $p_n(x)$ – абелевы многочлены. Действительно, если $u_1=\cos\frac{\pi}{n}$, то $u_k=\cos\frac{k\pi}{n}=T_k(u_1)$, где $T_k(x)$ – многочлен Чебышева с номером k. Так как $T_k(T_l(x))=T_l(T_k(x))$, то роль рациональных функций $\theta_i(x)$ из определения абелевых многочленов играют многочлены Чебышева. Поэтому разрешимость в радикалах уравнений $p_n(x)=0$ следует из работ самого Абеля. Но этот результат можно получить и путем построения группы Галуа многочлена $p_n(x)$. Покажем это на примере многочлена $p_{13}(x)$. Прежде всего мы найдем этот многочлен. Если n – нечетное простое число, то в [7] доказана формула $T_n(x)+1=(x+1)(p_n(x))^2$, где $T_n(x)$ – многочлен Чебышева. Отсюда при $n=13$, учитывая, что $T_{13}(x)=4096x^{13}-13312x^{11}+16640x^7+2012x^5-$ $-364x^3+13x$, находим $p_{13}(x)=64x^6-32x^5-$ $-80x^4+32x^3+24x^2-6x-1$. Корнями этого многочлена являются числа $\cos\frac{s\pi}{13}, s=1,3,5,7,9,11$.

Если $x_1=\cos\frac{\pi}{13}=\alpha$, то $x_2=\cos\frac{3\pi}{13}=T_3(\alpha)=$ $=4\alpha^3-3\alpha$, $x_3=\cos\frac{5\pi}{13}=T_5(\alpha)=16\alpha^5-20\alpha^3+5\alpha$. Таким же образом можно найти $x_4=\cos\frac{7\pi}{13}=T_7(\alpha)$, $x_5=\cos\frac{9\pi}{13}=T_9(\alpha)$, $x_6=\cos\frac{11\pi}{13}=T_{11}(\alpha)$. Но мы проведем эти вычисления иначе. Имеем $x_4=\cos\frac{7\pi}{13}=-\cos\frac{6\pi}{13}=$ $=-\left(2\cos^2\frac{3\pi}{13}-1\right)=-\left(2\left(4\alpha^3-3\alpha\right)^2-1\right)=-32\alpha^6+$ $+48\alpha^4-18\alpha^2+1=p_{13}(\alpha)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-16\alpha^5+8\alpha^4+\right.$ $\left.+16\alpha^3-6\alpha^2-3\alpha+\frac{1}{2}\right)$. Отсюда следует, что $x_4=-16\alpha^5+8\alpha^4+16\alpha^3-6\alpha^2-3\alpha+\frac{1}{2}$. Далее имеем $x_5=\cos\frac{9\pi}{13}=-\cos\frac{4\pi}{13}=-\left(2\cos^2\frac{2\pi}{13}-1\right)=$

$=-\left(2\left(2\alpha^2-1\right)^2-1\right)=-8\alpha^4+8\alpha^2-1$,

$x_6=\cos\frac{11\pi}{13}=-\cos\frac{2\pi}{13}=-\left(2\cos^2\frac{\pi}{13}-1\right)=-2\alpha^2+1$.

Таким образом, все корни многочлена $p_{13}(x)$ рационально выражаются через один его корень α, т.е. справедливы формулы:

$$x_1=\alpha,\ x_2=4\alpha^3-3\alpha,$$
$$x_3=16\alpha^5-20\alpha^3+5\alpha,$$
$$x_4=-16\alpha^5+8\alpha^4+16\alpha^3-6\alpha^2-3\alpha+\frac{1}{2}, \qquad (1)$$
$$x_5=-8\alpha^4+8\alpha^2-1,\ x_6=-2\alpha^2+1$$

Заметим, что, если $u=\cos\frac{2\pi}{26}+i\sin\frac{2\pi}{26}$, $u^{26}=1$, то $x_1=\cos\frac{\pi}{13}=\frac{1}{2}\left(u+u^{25}\right)$, $x_2=\cos\frac{3\pi}{13}=\frac{1}{2}\left(u^3+u^{23}\right)$, $x_3=\cos\frac{5\pi}{13}=\frac{1}{2}\left(u^5+u^{21}\right)$, $x_4=\cos\frac{7\pi}{13}=\frac{1}{2}\left(u^7+u^{19}\right)$, $x_5=\cos\frac{9\pi}{13}=\frac{1}{2}\left(u^9+u^{17}\right)$, $x_6=\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1}{2}\left(u^{11}+u^{15}\right)$.

Построим теперь группу Галуа $G(p_{13})$ многочлена $p_{13}(x)$. Через τ_k обозначим автоморфизм, переводящий корень x_1 в корень x_k. Таким образом, $\tau_k(x_1)=x_k, k=1,2,3,4,5,6.$ Ясно, что $\tau_1=(1)$. Найдем τ_6. Так как $\tau_6(x_1)=x_6=-2x_1^2+1$, то $\tau_6(x_2)=-2x_2^2+1$. Отсюда в силу равенства $x_2^2=\left(\frac{1}{2}\left(u^3+u^{23}\right)\right)^2=\frac{1}{4}\left(u^6+u^{20}+2\right)=$ $=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{13}+1\right)=\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{7\pi}{13}+1\right)=\frac{1}{2}\left(-x_4+1\right)$ получаем $\tau_6(x_2)=x_4$. Далее имеем $\tau_6(x_3)=-2x_3^2+1$, где $x_3^2=\left(\frac{1}{2}\left(u^5+u^{21}\right)\right)^2=\frac{1}{4}\left(u^{10}+u^{16}+2\right)=$ $=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{10\pi}{13}+1\right)=\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{13}+1\right)=\frac{1}{2}\left(-x_2+1\right)$. Поэтому $\tau_6(x_3)=x_2$. Аналогично имеем $\tau_6(x_4)=x_1,\tau_6(x_5)=x_3,\tau_6(x_6)=x_5$. Значит, $\tau_6=(1,6,5,3,2,4)$. Для нахождения остальных подстановок достаточно заметить, что $\tau_6^2=(1,5,2)(3,4,6)=\tau_5$, $\tau_6^3=(1,3)(2,6)(4,5)=\tau_3$, $\tau_6^4=(1,2,5)(3,6,4)=\tau_2$, $\tau_6^5=(1,4,2,3,5,6)=\tau_4$.

Таким образом, искомая группа Галуа является циклической с образующим элементом τ_6, то есть $G(p_{13})=\{\tau_6,\tau_6^2=\tau_5,\tau_6^3=\tau_3,\tau_6^4=\tau_2,$ $\tau_6^5=\tau_4,\tau_6^6=\tau_1\}$, $ordG(p_{13})=6$. Эта группа является абелевой, что означает разрешимость уравнения $p_{13}(x)=0$ в радикалах. Группа $G(p_{13})$ имеет несобственные подгруппы $H_1=\{\tau_1,\tau_2,\tau_5\}$, $H_2=\{\tau_1,\tau_3\}$. Найдем подполе L_1 поля $\mathbb{Q}(\alpha)$, соответствующее подгруппе H_1. Для этого выпишем смежные классы $H_1=\{\tau_1,\tau_2,\tau_5\}$, $\tau_3H_1=\{\tau_3,\tau_4,\tau_6\}$ группы $G(p_{13})$ по подгруппе H_1 и образуем многочлены $g_1(x), g_2(x)$, соответствующие этим смежным классам. Эти многочлены имеют вид $g_1(x)=8(x-x_1)(x-x_2)\times$ $\times(x-x_5)=8\left(x-\cos\frac{\pi}{13}\right)\left(x-\cos\frac{3\pi}{13}\right)\left(x-\cos\frac{9\pi}{13}\right)=$ $=8\left(x^3-y_1x^2+z_1x-t_1\right)$, $g_2(x)=8(x-x_3)\times$ $\times(x-x_4)(x-x_6)=8\left(x-\cos\frac{5\pi}{13}\right)\left(x-\cos\frac{7\pi}{13}\right)\times$ $\times\left(x-\cos\frac{11\pi}{13}\right)=8\left(x^3-y_2x^2+z_2x-t_2\right)$. Здесь $y_1=x_1+x_2+x_5$, $z_1=x_1x_2+x_1x_5+x_2x_5$, $t_1=x_1x_2x_5$, $y_2=x_3+x_4+x_6$, $z_2=x_3x_4+x_3x_6+x_4x_6$, $t_2=x_3x_4x_6$. Отметим, что автоморфизмы подгруппы H_1 все коэффициенты многочленов $g_1(x)$, $g_2(x)$ оставляют на месте. Покажем это на примере автоморфизма τ_2. Так как $\tau_2(x_1)=x_2$, $\tau_2(x_2)=x_5$, $\tau_2(x_5)=x_1$, то $\tau_2(y_1)=\tau_2(x_1+x_2+x_5)=x_2+x_5+x_1=y_1$.

$\tau_2(z_1)=x_2x_5+x_2x_1+x_5x_1=z_1,\tau_2(t_1)=x_2x_5x_1=t_1$.

Точно также проверяется, что $\tau_2(y_2)=y_2$, $\tau_2(z_2)=z_2$, $\tau_2(t_2)=t_2$. Так как многочлен $p_{13}(x)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, но имеет разложение $p_{13}(x)=g_1(x)g_2(x)$, где $g_1(x), g_2(x)\notin\mathbb{Q}[x]$, то должно быть $g_1(x), g_2(x)\in L_1[x]$. Найдем коэффициенты многочленов $g_1(x)$, $g_2(x)$, порождающие поле L_1. Так как $y_1+y_2=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$, то $y_1+y_2=\frac{1}{2}$. Вычислим $y_1y_2=(x_1+x_2+x_5)(x_3+x_4+x_6)=$ $=\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{11\pi}{13}+$

$+\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{11\pi}{13}+$
$+\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{11\pi}{13}$.
Заменив в этом выражении произведения косинусов на сумму соответствующих косинусов, после приведения подобных членов получим $y_1y_2=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\right.$ $\left.+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}\right)=-\frac{3}{4}$. Из полученных равенств следует, что y_1, y_2 являются корнями квадратного уравнения $y^2-\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}=0$. Отсюда $y_1=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{13}\right), y_2=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{13}\right)$. Далее имеем $z_1=x_1x_2+x_1x_5+x_2x_5=\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+$ $+\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}$. Проведя вычисления, аналогичные приведенным выше, получим $z_1=-\frac{1}{4}$. Так как $t_1=x_1x_2x_5=\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{3\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}=\frac{1}{2}\cos\frac{9\pi}{13}\times$ $\times\left(\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}\right)$, то, продолжив вычисления, получим $t_1=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\right.$ $\left.+\cos\frac{13\pi}{13}\right)=\frac{1}{4}\left(y_2-1\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{13}}{4}\right)=-\frac{3}{16}-\frac{\sqrt{13}}{16}$.
Аналогично находим $z_2=x_3x_4+x_3x_6+x_4x_6=-\frac{1}{4}$, $t_2=x_3x_4x_6=-\frac{3}{16}+\frac{\sqrt{13}}{16}$. Отсюда следует, что поле L_1, инвариантное относительно подгруппы H_1, имеет вид $L_1=\mathbb{Q}\left(y_1,z_1,t_1\right)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{13}\right)$. Над этим полем многочлен $p_{13}\left(x\right)=64x^6-32x^5-$ $-80x^4+32x^3+24x^2-6x-1$ разлагается на два множителя следующим образом:

$$p_{13}\left(x\right)=g_1\left(x\right)g_2\left(x\right)=$$
$$=\left(8x^3-\left(2+2\sqrt{13}\right)x^2-2x+\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{13}\right)\right)\times$$
$$\times\left(8x^3-\left(2-2\sqrt{13}\right)x^2-2x+\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{13}\right)\right).$$

Следовательно, решение уравнения $p_{13}\left(x\right)=0$ сводится к решению квадратного уравнения $y^2-\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}=0$ и кубичного уравнения $g_1\left(x\right)=0$. Если один корень уравнения $p_{13}\left(x\right)=0$ будет найден, то все остальные его корни можно вычислить по формулам (1).

Таким образом, в данной работе доказано, что уравнение вида $p_n\left(x\right)=0$, где $p_n\left(x\right)$ – минимальный многочлен числа $\cos\frac{\pi}{n}$, разрешимо в радикалах при любом натуральном *n*. Алгоритм решения таких уравнений показан на примере уравнения $p_{13}\left(x\right)=64x^6-32x^5-80x^4+$ $+32x^3+24x^2-6x-1=0$.

* * * * * * * * * *

1. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. – М.: Физматлит, 2001. – Ч.3. – 272 с.
2. *Дальма А.* Эварист Галуа, революционер и математик. – М.: Наука, 1984. – 112 с.
3. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 624 с.
4. *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры. – М.: ВИНИТИ, 1986. – 290 с.
5. *Прасолов В.В.* Многочлены. – М.: МЦНМО, 2003. – 336 с.
6. *Сушкевич А.К.* Основы высшей алгебры. – М.-Л.: ОГИЗ, 1941. – 460 с.
7. *Галиева Л.И., Галяутдинов И.Г.* Нахождение степени одного класса алгебраических чисел // Образование в техническом вузе в 21 веке. – Наб. Челны, 2008. – Вып.2. – С.147-150.
8. *Галиева Л.И., Галяутдинов И.Г.* Об одном классе неприводимых многочленов // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. – 2008. – №2(13). – С.8-11.

ON A CLASS OF ABELIAN POLYNOMIALS

L.I.Galieva, I.G.Galautdinov, E.E.Lavrenteva

We show that minimal polynomials $p_n\left(x\right)\in\mathbb{Z}\left[x\right]$ of algebraic numbers $\cos\frac{\pi}{n}\left(n\in\mathbb{N}\right)$ are classes of Abelian polynomials. We construct a Galois group $G\left(p_{13}\right)$ of the polynomial $p_{13}\left(x\right)$, and find its decomposition into two multipliers over a field which corresponds to a subgroup with index 2 of the group $G(p_{13})$.

Key words: Abelian polynomials, Galois resolution, Galois group.

* * * * * * * * * *

Галиева Ляля Исхаковна – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: ffmo@tggpu.ru

Галяутдинов Ильдархан Галяутдинович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: ffmo@tggpu.ru

Лаврентьева Елена Евгеньевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: ffmo@tggpu.ru

Поступила в редакцию 13.10.2010