

## ДИНАМИКА НЕСФЕРИЧЕСКОГО ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ

© А.А.Аганин, Л.А.Косолапова, В.Г.Малахов

В статье изучается нелинейная динамика газового пузырька в жидкости на основе квадратичной модели, учитывающей искажения его сферической формы и перемещение пузырька в пространстве. Приближенно учтены вязкость и сжимаемость жидкости. Приведены примеры взаимного влияния радиальных колебаний, искажений сферической формы и пространственного перемещения пузырька воздуха в воде. Для периодического изменения давления жидкости построена область линейной устойчивости сферической формы пузырька, а также области с ограниченными во времени амплитудами искажений и перемещением пузырька в пространстве.

**Ключевые слова:** газовый пузырек, нелинейные колебания, потенциальное течение, пространственное перемещение.

### 1. Введение

При изучении движения несферического газового пузырька в жидкости возникает вопрос о взаимном влиянии его радиальных колебаний, искажений сферической формы и пространственного перемещения. Обзор работ по взаимодействию объемной и поверхностных мод в осциллирующих пузырьках выполнен в [1]. В обзоре [2], куда вошли работы по динамике пузырька с учетом его пространственного перемещения, отмечается необходимость рассмотрения взаимодействия перемещения пузырька с колебаниями его формы и объема. Изучение такого взаимодействия возможно лишь на основе соотношений нелинейных относительно амплитуд искажений и скорости движения пузырька.

Заметный вклад в решение этой задачи был сделан в [3], где получены уравнения колебаний осесимметричного пузырька, перемещающегося в пространстве, с использованием представления формы поверхности пузырька в виде ряда сферических гармоник. При этом в уравнениях учтены члены второго порядка малости относительно амплитуд искажения сферической формы и скорости движения центра пузырька. Жидкость считается несжимаемой, учтены поверхностное натяжение и вязкость жидкости в приближении [4]. Показано, что наличие начальной скорости перемещения сферического пузырька или начального искажения по любой нечетной гармонике вызывает радиальные колебания, движение пузырька в пространстве и искажение его формы по всем гармоникам. Наличие же начального искажения по любой четной гармонике возбуждает радиальные колебания и искажения по всем четным гармоникам. В работе [5] для идеальной несжимаемой жидкости получены соотношения третьего порядка малости относительно ампли-

туд искажения формы и скорости движения пузырька. Показано, что уравнения третьего порядка дают более сложную картину нелинейного взаимодействия. В частности, получено, что взаимодействие любых трех нечетных или одной нечетной и двух четных гармоник вызывает перемещение пузырька в пространстве.

В настоящей работе изучается динамика несферического пузырька газа в жидкости с учетом его перемещения вдоль вертикальной оси. Используется квадратичная относительно искажений сферической формы пузырька математическая модель с приближенным учетом вязкости и сжимаемости жидкости при предположении, что скорость перемещения пузырька имеет порядок скорости его радиальных колебаний [6].

### 2. Постановка задачи

Изучается осесимметричная динамика газового пузырька в неограниченном объеме жидкости. Движение жидкости предполагается потенциальным. Вязкость учитывается через динамическое граничное условие на поверхности пузырька. Жидкость в ближней к пузырьку области считается несжимаемой. При таких допущениях движение жидкости описывается уравнениями

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p}{\rho_0} = G(t), \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $p$  – давление в жидкости,  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $\Phi$  – потенциал скорости,  $G(t)$  – произвольная функция времени. Наряду с неподвижной цилиндрической системой координат  $x, \varphi, z$  вводится подвижная сферическая система координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре пузырька, связанная в осесимметричном случае с неподвижной системой уравнениями

$$x = r \sin \theta, \quad z = z_c(t) + r \cos \theta,$$

где  $z_c$  – координата центра пузырька в неподвижной системе отсчета в момент времени  $t$ .

В подвижной системе координат второе уравнение (1) запишется в виде

$$\Phi_t - \dot{z}_c \left( \Phi_r \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \Phi_\theta \right) + \frac{1}{2} \left( \Phi_r^2 + \frac{1}{r^2} \Phi_\theta^2 \right) + \frac{p}{\rho_0} = G(t), \quad (2)$$

где  $\dot{z}_c$  – скорость движения начала координат подвижной системы.

Считается, что газ в пузырьке идеальный, с однородным давлением, изменяющимся по закону

$$p^- = p_b^0 \left( \frac{V_0 - bV_0}{V - bV_0} \right)^\gamma, \quad (3)$$

$p_b^0$  – начальное давление газа в пузырьке,  $V_0, V$  – начальный и текущий объемы пузырька,  $b$  – постоянная,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Предполагается, что на бесконечном удалении от пузырька жидкость движется со скоростью  $\mathbf{u}_\infty$ , определяемой выражением

$$\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_l(t) = u_l(t) \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

где  $\mathbf{e}_z$  – направляющий вектор оси  $z$ , а давление жидкости  $p_\infty$  на уровне  $z = z_c$  изменяется по закону

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t, \quad (5)$$

где  $p_0$  – статическое давление в жидкости,  $\Delta p$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота колебаний.

На поверхности пузырька  $F(r, \theta, t) = 0$  в подвижной сферической системе координат ставятся кинематическое

$$F_t + (\Phi_r - \dot{z}_c \cos \theta) F_r + \left( \frac{1}{r} \Phi_\theta + \dot{z}_c \sin \theta \right) \frac{1}{r} F_\theta = 0 \quad (6)$$

и динамическое

$$p^+ = p^- - 2\sigma H + \tau_{nn}, \quad (7)$$

граничные условия, где  $\sigma$  – поверхностное натяжение,  $H$  – средняя кривизна поверхности,  $\tau_{nn}$  – вязкие напряжения,  $\tau_{nn} = 2\mu \partial^2 \Phi / \partial n^2$ ,  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости. Предположение о потенциальности течения жидкости исключает возможность использования динамического граничного условия по касательной, поскольку система становится переопределенной. Поэтому в настоящей работе требуется выполнение только условия (7). Сравнение моделей с различными способами учета вязкости [7] показывает возможность такого подхода.

### 3. Метод решения

Уравнение поверхности пузырька в сферической системе координат запишем в виде ряда по сферическим гармоникам

$$r(\theta, t) = R(t) \left[ 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i(t) P_i(\eta) \right]. \quad (8)$$

Здесь  $P_i$  – полином Лежандра степени  $i$ ,  $\eta = \cos \theta$ . Параметр  $R$  будем называть радиусом пузырька,  $\varepsilon_i$  – искажением сферической формы по гармонике с номером  $i$ .

Потенциал скорости  $\Phi$  берется в виде

$$\Phi(\theta, r, t) = \frac{B_0}{r} + \left( u_l r + \frac{B_1}{r^2} \right) P_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{B_i}{r^{i+1}} P_i(\cos \theta). \quad (9)$$

Дальнейшие соотношения получены в предположении, что искажения сферической формы пузырька  $\varepsilon_i$  таковы, что значениями  $|\varepsilon_i^3|$  по сравнению с единицей можно пренебречь. При этом используются следующие оценки

$$|\varepsilon_i| \sim \varepsilon, |R\dot{\varepsilon}_i / \dot{R}| \sim \varepsilon, |\delta_i / B_0| \sim \varepsilon, |\dot{\delta}_i / \dot{B}_0| \sim \varepsilon, \varepsilon^3 \ll 1, \quad (10)$$

где  $\delta_i = B_i / R^i$ ,  $i = \overline{1, \infty}$ .

Строгий учет влияния сжимаемости при условиях (10) является довольно сложной задачей. Поэтому аналогично [8] предполагается, что несферические возмущения пузырька оказывают заметное влияние на колебание жидкости лишь в некоторой области  $r \leq r_e$  ( $r_e \sim R_0$ , ближнее поле), в которой жидкость считается несжимаемой. При  $r \geq r_e$  (дальнее поле) сжимаемость учитывается в рамках линейной акустики. Из условия сопряжения решений на границе ближнего и дальнего полей  $r = r_e$  получаем выражение для функции  $G(t)$  в виде

$$G(t) = \frac{p_\infty}{\rho_0} + \frac{1}{2} u_l^2 + g z_c - \dot{z}_c u_l + \frac{1}{c_f} \ddot{B}_0, \quad (11)$$

где  $c_f$  – скорость звука в жидкости. При этом дополнительно к (10) вводятся следующие ограничения:

$$\dot{R} / c_f \sim \varepsilon, w / c_f \sim \varepsilon, \quad (12)$$

где  $w = \dot{z}_c - u_l$  – относительная скорость движения центра пузырька.

Подставляя разложения (8), (9) в условия (6), (7) с учетом (2), (11), применяя при интегрировании полученной системы по координате  $\theta$  процедуру метода Бубнова-Галеркина и исключив неизвестные  $B_0, \delta_1, \delta_i$  с учетом (10), (12), получа-

ем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиуса  $R(t)$ , искажений  $\varepsilon_i(t)$  и координаты центра пузырька  $z_c(t)$ . Эта система получена и полностью приведена в [6]. Здесь в силу громоздкости она не приводится. Следует отметить, что в [6], в отличие от [9], скорость центра пузырька считается немалой и, как следствие этого предположения, в разрешающих соотношениях появляются слагаемые вида  $w\varepsilon_i\varepsilon_j, w^2\varepsilon_i, w^2\varepsilon_i\varepsilon_j$ .

Выражение для текущего объема пузырька с принятой точностью имеет вид

$$V = 4\pi R^3 (1 + 3\varepsilon_i^2 \tilde{\alpha}_{ii} / 2) / 3. \quad (13)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с начальными условиями

$$R(0) = R_0, \dot{R}(0) = 0, \varepsilon_i(0) = \varepsilon_i^0, \\ \dot{\varepsilon}_i(0) = 0, z(0) = z_{c0}, w(0) = w_0$$

решается методом Дормана-Принса седьмого порядка точности [10]. При вычислениях в представлении (8), (9) бесконечные верхние пределы сумм заменяются на число  $M$ . При такой замене система уравнений содержит  $2M+2$  неизвестные функции.

#### 4. Результаты расчетов

Рассматривается задача о движении несферического пузырька воздуха в воде под действием периодически изменяющегося давления жидкости (5). Взяты следующие исходные данные:

$$\gamma = 1,4, \quad b = 8,5, \quad c_f = 1500 \text{ м/с}, \\ \rho_f = 998 \text{ кг/м}^3, \quad \sigma = 0,0725 \text{ кг/с}^2, \\ \mu = 10^{-3} \text{ кг/мс}, \quad p_0 = 0,1 \text{ МПа}, \quad (14)$$

$$\Delta p \in [0,05, 0,09] \text{ МПа}, \quad \omega / 2\pi = 26,5 \text{ кГц}$$

Изучается влияние начального радиуса пузырька  $R_0$  и амплитуды колебания давления жидкости  $\Delta p$  на характер движения пузырька и изменение его сферической формы.

Вначале рассмотрим решение задачи, полученное при пренебрежении слагаемыми, содержащими искажения  $\varepsilon_i$  в степени выше первой. При этом связь между искажениями и перемещением центра пузырька отсутствует. Для радиально осциллирующего пузырька в параметрическом пространстве  $(R_0, \Delta p)$  построены области линейной устойчивости сферической формы пузырька, приведенные на рис.1. Для точек заштрихованной области сферическая форма устойчива и заданное начальное искажение со временем убывает до нуля. Вне заштрихованной об-

ласти сферическая форма пузырька неустойчива: наблюдается неограниченный рост начального искажения, приводящий к разрушению пузырька.

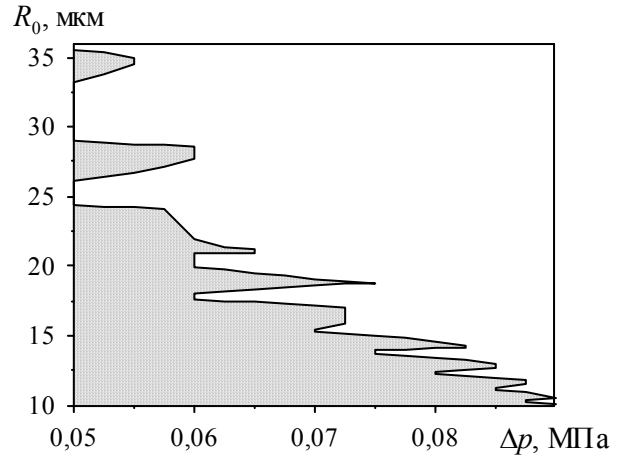


Рис.1. Области линейной устойчивости сферической формы пузырька.

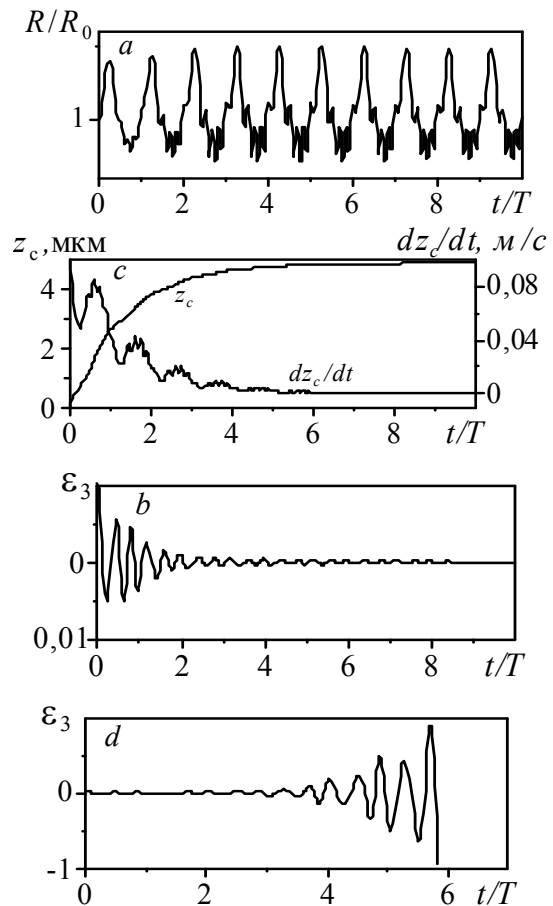


Рис.2. Зависимости от времени величин  $R/R_0, z_c, dz_c/dt, \varepsilon_3$  для  $\Delta p = 0,05 \text{ МПа}$ : a, b, c –  $R_0 = 24,3 \text{ мкм}$ , d –  $R_0 = 25,5 \text{ мкм}$ .

Отметим, что вблизи границы области устойчивости для  $0,05 \text{ МПа} \leq \Delta p \leq 0,0775 \text{ МПа}$  неустойчивость формы развивается по третьей гармонике

ке, а для  $\Delta p > 0,0775$  МПа – по второй. Движение пузырька возникает только при не нулевой начальной скорости  $w_0$ . При этом пузырек перемещается на некоторое расстояние от пучности волны давления жидкости, где вследствие действия вязкого трения он останавливается.

На рис.2 для  $\Delta p = 0,05$  МПа,  $\varepsilon_3(0) = 0,01$  и  $w_0 = 0,1$  м/с изображены зависимости от времени отношения  $R/R_0$ , искажения  $\varepsilon_3$ , координаты центра пузырька  $z_c$  и его скорости  $dz_c/dt$  для  $R_0 = 24,3$  мкм (рис.1 а, б, с) и  $R_0 = 25,5$  мкм (рис.1 д). Здесь и далее  $T$  – период колебания давления жидкости. Видно, что для  $R_0 = 24,3$  мкм искажение и скорость пузырька со временем убывают до нуля, а для  $R_0 = 25,5$  мкм искажение резко возрастает и пузырек разрушается. Других сценариев динамики пузырька в линейной относительно искажений задаче не наблюдается.

Далее с использованием полных соотношений из [6] для ряда значений  $\Delta p$  получены решения задачи с учетом пяти гармоник  $\varepsilon_2 \div \varepsilon_6$  в представлении (8). Исходные данные (14) дополнились условиями

$$\varepsilon_5^0 = 0,3, \varepsilon_i^0 = 0, i \neq 5, w_0 = 0.$$

В этом случае возникающие при изменении давления жидкости радиальные колебания в результате нелинейного взаимодействия порождают колебания формы пузырька и его перемещение в пространстве.

На рис.3, 4 приведены результаты расчета при  $\Delta p = 0,05$  МПа. На рис.3 для  $R_0 = 24,3$  мкм изображены зависимости от времени отношения  $R/R_0$ , искажения  $\varepsilon_3$ , координаты центра пузырька  $z_c$  и его скорости  $dz_c/dt$ . Период колебания радиуса пузырька  $R$  совпадает с периодом колебания давления жидкости  $T$ . Наличие начального искажения по пятой гармонике в результате нелинейного взаимодействия приводит к возникновению всех участвующих в представлении формы гармоник, из которых амплитуда  $\varepsilon_3$ , является наибольшей (рис.3). Видно, что с течением времени развитие искажения вызывает перемещение пузырька. Когда колебания искажений становятся периодическими, центр пузырька начинает совершать колебания с малой амплитудой относительно уровня  $z \approx 1$  мкм. Для  $R_0 \leq 24,3$  мкм динамика пузырька либо аналогична представленной на рис.3, либо с течением времени искажения и скорость перемещения убывают до нуля, т.е. сферическая форма пузырька устойчива и его движение прекращается.

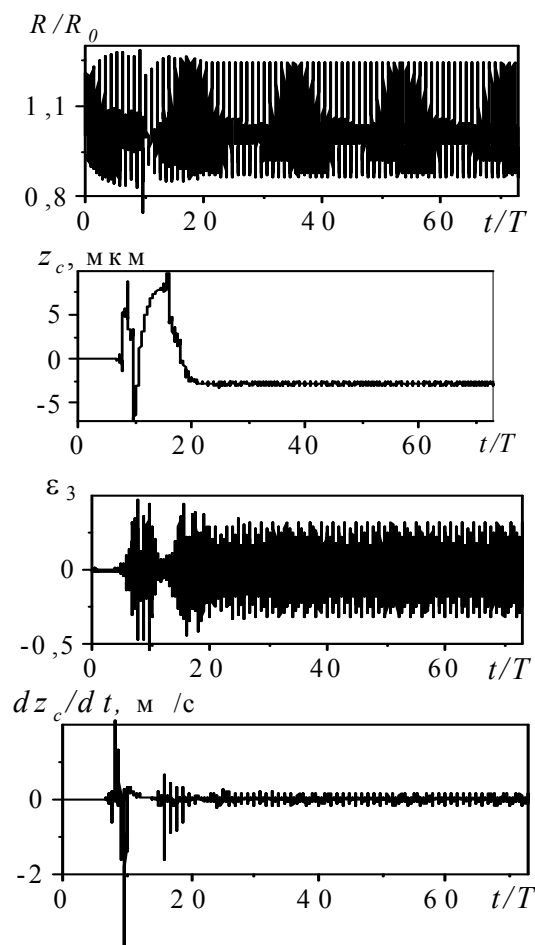


Рис.3. Зависимости от времени отношения  $R/R_0$ , искажения  $\varepsilon_3$ , координаты центра пузырька  $z_c$  и его скорости для  $\Delta p = 0,05$  МПа,  $R_0 = 24,3$  мкм.

На рис.4 приведены зависимости от времени величины максимального на периоде  $T$  искажения  $\varepsilon_3^T = \max_{(k-1)T \leq t \leq kT} |\varepsilon_3|, k = 1, 2, \dots$  и координаты центра пузырька  $z_c$  для пяти значений  $R_0$ , отражающие возможные сценарии динамики пузырька. Для  $R_0 = 25,2$  мкм (рис.4 а, б) наблюдаются периодические колебания искажений и сложное движение центра пузырька, состоящего из его поступательного движения и колебаний. При  $R_0 = 29,15$  мкм (рис.4 с, д) колебания искажений аперриодические, а пузырек совершает так называемое "танцующее" движение относительно пучности волны давления жидкости. Иная картина движения наблюдается для  $R_0 = 35,2$  мкм,  $35,4$  мкм и  $35,6$  мкм (рис.4 е, ф), когда колебания искажений аперриодические, а пузырек неограниченно перемещается в отрицательном или положительном направлении оси  $z$ . И наконец, на рис.4 г, h для  $R_0 = 24,6$  мкм приведен случай, когда наблюдается резкий рост искажений, приводящий к разрушению пузырька.

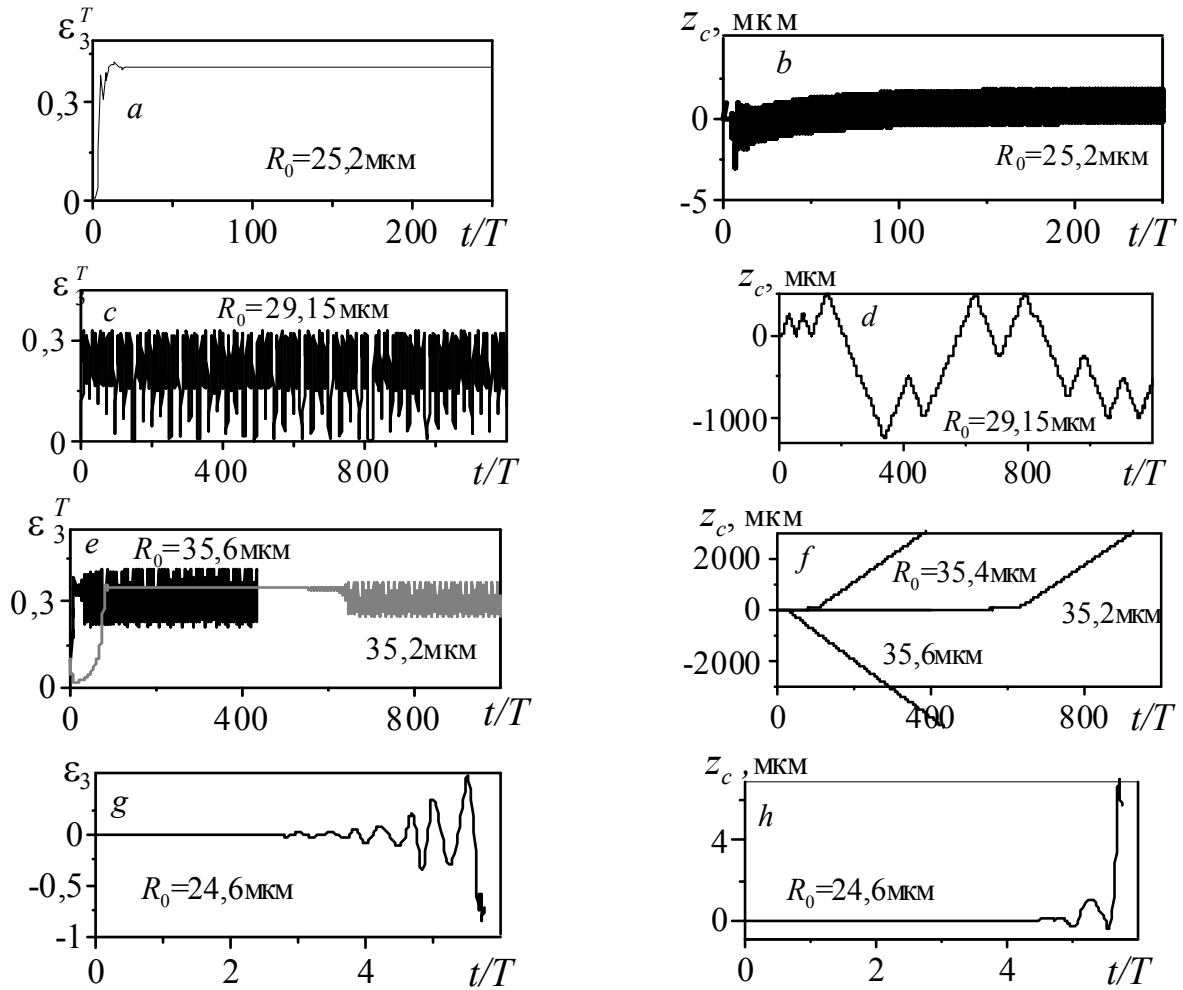


Рис.4. Зависимости от времени искажений  $\varepsilon_3^T$ , координаты центра пузырька  $z_c$  и искажения  $\varepsilon_3$  для  $\Delta p = 0,05 \text{ МПа}$  и различных значений  $R_0$ .

Зависимости от времени искажения  $\varepsilon_2^T$  и координаты центра пузырька  $z_c$  для трех значений  $R_0$  при  $\Delta p = 0,09 \text{ МПа}$  приведены на рис.5. Видно, что при  $R_0 = 10,8 \text{ мкм}$  искажение  $\varepsilon_2$  совершает периодические колебания с периодом, равным  $2T$ , при  $R_0 = 10 \text{ мкм}$  – колебания с периодом  $4T$  и при  $R_0 = 10,25 \text{ мкм}$  – аperiodические колебания. Установлено, что колебания формы пузырька с ограниченной амплитудой искажения наблюдаются при  $R_0 \leq 10,1 \text{ мкм}$  и в интервале  $R_0 \in [10,25, 10,8] \text{ мкм}$ . Характер движения пузырька независимо от типа колебания формы одинаков. Искажения формы вызывают перемещение пузырька в пространстве на небольшом временном интервале. После этого скорость перемещения уменьшается до нуля и пузырек останавливается на некотором расстоянии от пучности волны давления жидкости.

При значениях начального сферического радиуса, лежащих вне указанных выше интервалов,

происходит разрушение пузырька, аналогичное приведенному на рис.4 (g, h).

В параметрическом пространстве  $(R_0, \Delta p)$  построена область, приведенная на рис.6, аналогичная области линейной устойчивости сферической формы (рис.1). Точками отмечены участки, где имеют место режимы колебания формы пузырька с ограниченной амплитудой и ограниченными перемещениями центра пузырька. Штрихами выделены области, где возникает неограниченное поступательное перемещение центра пузырька при ограниченных искажениях формы. И для незаштрихованных участков наблюдается неустойчивость сферической формы, приводящая к разрушению пузырька. Видно, что условие ограниченного пространственного перемещения несколько сужает область устойчивости сферической формы пузырька.

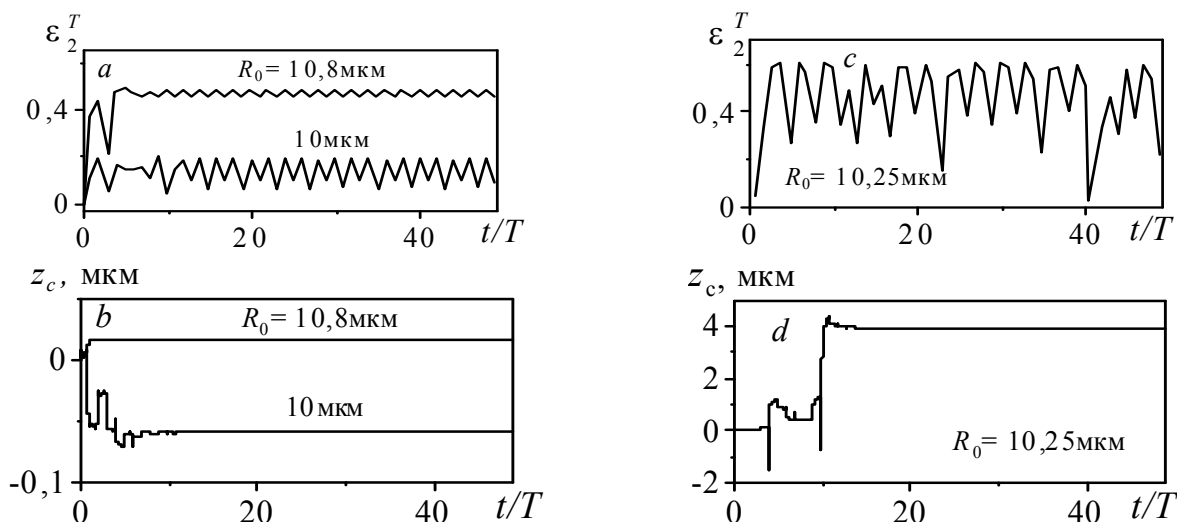


Рис.5. Зависимости от времени искажений  $\varepsilon_2^T$  и координаты центра пузырька  $z_c$  для  $\Delta p = 0,09$  МПа и различных значений  $R_0$ .

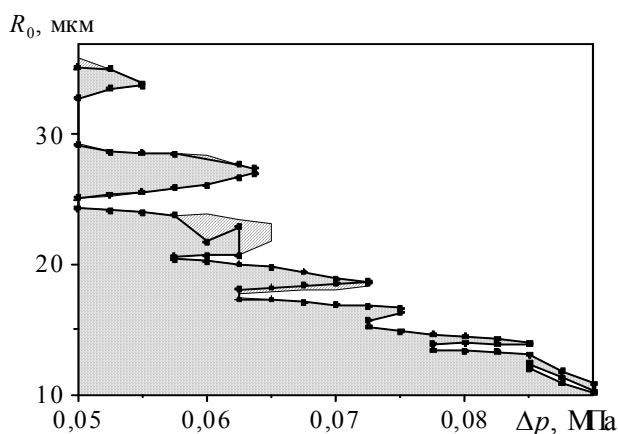


Рис.6. Области пространства  $(R_0, \Delta p)$  с различными режимами движения пузырька: точки – колебания с ограниченными амплитудами искажений и ограниченным по времени перемещением центра пузырька, штрихи – колебания с ограниченными амплитудами искажений и неограниченным по времени перемещением центра пузырька.

### 5. Заключение

Рассмотрена динамика пузырька воздуха в воде при периодическом изменении давления жидкости. Используется математическая модель, учитывающая большие радиальные колебания, немалые искажения формы и пространственное перемещение пузырька. Приблизительно учтены вязкость и сжимаемость жидкости. Показаны различные режимы движения пузырька, возникающие в зависимости от амплитуды давления и его начального радиуса. В параметрическом пространстве (начальный сферический радиус пузырька, амплитуда давления) построены области с ограниченными амплитудами колебания формы и ограниченным по времени перемещением центра пузырька.

Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке гранта РФФИ.

\*\*\*\*\*

1. Plesset M.S., Prosperetti A. Bubble dynamics and cavitation // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1977. – Vol.9. – P.145-185.
2. Feng Z.C., Leal L.G. Nonlinear bubble dynamics // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1997. – Vol.29. – P.201-242.
3. Doinikov A.A. Translational motion of a bubble undergoing shape oscillations // J. Fluid. Mech. – 2004. – Vol.501. – P.1-24.
4. Levich B.V. Physicochemical Hydrodynamics. – Prentice-Hall, 1962. – 699 p.
5. Show S.J. Translation and oscillation of a bubble under axisymmetric deformation // Physics of fluids. – 2006. – Vol.18(7). – 072104.
6. Аганин А.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г. Нелинейные радиальные колебания и пространственные перемещения несферического газового пузырька в жидкости // Мат. моделирование. – 2011. – Т.23. – №5. – С.56-70.
7. Ильгамов М.А., Аганин А.А., Косолапова Л.А. и др. Модели динамики несферического пузырька с учетом вязкости жидкости // Тр. Мат. Центра им.Н.И.Лобачевского: матер. 16-ой сессии Междун. шк. по моделям механики сплошной среды. Казань, 2002. – Казань: Казан. мат. общ-во, 2002. – Т.16: Модели механики сплошной среды. – С.192-201.
8. Нигматуллин Р.И., Ахатов И.Ш., Вахитова Н.К. О сжимаемости жидкости в динамике газового пузырька // Докл. РАН. – 1996. – Т.348. – №6. – С.768-771.
9. Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г. Движение пузырька газа в жидкости с учетом искажения его сферической формы // Вест. ТГГПУ. – 2010. – Т.21. – №3. – С.38-44.
10. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

## **DYNAMICS OF A NONSPHERICAL GAS BUBBLE IN LIQUID**

**A.A.Aganin, L.A.Kosolapova, V.G.Malakhov**

Nonlinear dynamics of a gas bubble in liquid is studied on the basis of quadratic model allowing distortions of its shape and spatial translations of the bubble. The liquid compressibility and viscosity are taken into account approximately. Some examples of mutual influence of radial oscillations, the spherical shape distortions, and spatial displacements of an air bubble in water are presented. In the case of periodic variation of the liquid pressure, the area of linear stability of the spherical shape of the bubble as well as the areas with finite-in-time amplitudes of distortions and spatial translations of the bubble is computed.

**Key words:** gas bubble, nonlinear oscillations, potential flow, spatial translation.

\* \* \* \* \*

**Аганин Александр Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и вычислительных технологий Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета, заведующий лабораторией Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН.

E-mail: [aganin@kfti.knc.ru](mailto:aganin@kfti.knc.ru)

**Косолапова Людмила Александровна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН.

E-mail: [kosolapova@kfti.knc.ru](mailto:kosolapova@kfti.knc.ru)

**Малахов Владимир Георгиевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН.

E-mail: [malahov@kfti.knc.ru](mailto:malahov@kfti.knc.ru)

Поступила в редакцию 07.05.2011