МАТЕМАТИКА

УДК 511.61

КЛАСС МНОГОЧЛЕНОВ СО СВОЙСТВАМИ КРУГОВЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

© Л.И.Галиева, И.Г.Галяутдинов

Строятся неприводимые в кольце $\mathbf{Z}[x]$ многочлены $t_n(x)$ с целыми коэффициентами, корнями которых являются числа вида $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$, где n не равно 2 и принимает натуральные значения. В работе полное доказательство приводится для случая, когда n – нечетное натуральное число.

Ключевые слова: класс многочленов, свойство круговых многочленов

При нахождении многочленов $t_n(x)$, корнями которых являются числа вида $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$, важную роль играют рациональные функции $R_n(x)$, обладающие свойствами:

1) $R_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, где $P_n(x), Q_n(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами, степени которых не больше *n*,

2) $R_n(\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg} n\alpha$.

Многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ находятся из того, что

$$\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1}\alpha \sin\alpha - C_n^3 \cos^{n-3}\alpha \sin^3\alpha + \ldots + (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1}\alpha \sin^{2k+1}\alpha + \ldots$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha + C_n^4 \cos^{n-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots + (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}\alpha \sin^{2k}\alpha + \ldots$$

Отсюда $\operatorname{tg} n\alpha = \dfrac{P_n(\operatorname{tg}\alpha)}{Q_n(\operatorname{tg}\alpha)} = R_n(\operatorname{tg}\alpha)$, где $P_n(x) = C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \ldots + (-1)^k C_n^{2k+1} x^{2k+1} + \ldots$ (здесь количество слагаемых будет $l = \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$), $Q_n(x) = 1 - C_n^2 x^2 + \ldots + (-1)^k C_n^{2k} x^{2k} + \ldots$ (количество слагаемых равно $n+1-l$).

Заметим, что числители и знаменатели функции $R_n(x)$ могут быть вычислены по рекуррентным формулам: $P_{n+1}(x) = P_n(x) + xQ_n(x)$, $Q_{n+1}(x) = Q_n(x) - xP_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$P_1(x) = x, Q_1(x) = 1$. Например, $P_2(x) = 2x$, $Q_2(x) = 1 - x^2$, $P_3(x) = 3x - x^3$, $Q_3(x) = 1 - 3x^2$, $P_4(x) = 4x - 4x^3$, $Q_4(x) = 1 - 6x^2 + x^4$, $P_5(x) = 5x - 10x^3 + x^5$, $Q_5(x) = 1 - 10x^2 + 5x^4$

Так как $t_n(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$, то очевидно, что $t_1(x) = x$, $t_3(x) = x^2 - 3$, $t_4(x) = x - 1$, $t_6(x) = 3x^2 - 1$.

Суперпозиция многочлена $t_k(x)$ и функции $R_n(x)$ позволяет найти многочлен $t_{kn}(x)$ с целыми коэффициентами предписанной степени, корнем которого является число $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{kn}$. Для этого, используя уравнение

$$t_k(R_n(x)) = 0, \qquad (1)$$

одним из корней которого является число $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{kn}$, необходимо перейти к равносильному уравнению $f(x) = 0$, где $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, а затем выделить из этого многочлена множитель $t_{kn}(x)$ нужной степени. В общем случае справедливы:

Теорема 1. Пусть $n = 2k+1$, k – натуральное число, $\varphi(n)$ – функция Эйлера. Тогда имеется многочлен $t_n(x)$ с целыми $\varphi(n)$, корнями которого являются числа $\operatorname{tg}\dfrac{s\pi}{n}$, где $s < n$ и пробегает все значения, взаимно-простые с n.

Эти многочлены находятся рекуррентно из следующих формул:

$$P_n(x) = (-1)^k x t_n(x), \quad n = 2k+1 \text{ – простое число,} \qquad (2)$$

$$Q_p(x)^{\varphi(q)}\, t_q(R_p(x)) = t_q(x)\, t_n(x), \qquad (3)$$

$$n=pq,$$
$$p \text{ – простое, НОД } (p,q)=1,$$
$$Q_p(x)^{\varphi(q)}\, t_q(R_p(x)) = t_n(x),\ n=pq, \qquad (4)$$
$$p \text{ – простое, НОД } (p,q)=p$$

Теорема 2. Пусть $n=4k+2$, k – натуральное число. Тогда имеется многочлен $t_n(x)$ с целыми коэффициентами степени $\varphi(n)$, корнями которого являются числа $\operatorname{tg}\frac{s\pi}{n}$, где $s<n$ и пробегает все значения, взаимно-простые с n.

Многочлен $t_n(x)$ находится из равенства

$$Q_2(x)^{\varphi(n_1)}\, t_{n_1}(R_2(x)) = t_{n_1}(x)\, t_n(x),$$
$$n=4k+2=2(2k+1)=2n_1.$$

Теорема 3. Пусть $n=4k$, k – натуральное число. Тогда имеется многочлен $t_n(x)$ с целыми коэффициентами степени $\frac{1}{2}\varphi(n)$, корнями которого являются числа $\operatorname{tg}\frac{s\pi}{n}$, где $s<n$, НОД $(s,n)=1$ и $s\equiv 1 \pmod 4$. Для $s\equiv 3 \pmod 4$ соответствующие числа являются корнями многочлена $t_n(-x)$.

Искомые многочлены находятся из равенств:

$Q_k(x)\, t_4(R_k(x)) = t_4(\pm x)\, t_n(x)$, $n=4k$, k – нечетное простое число,

$$Q_p(x)^{\frac{1}{2}\varphi(4q)}\, t_{4q}(R_p(x)) = t_{4q}(\pm x)\, t_n(x),$$

$n=4k$, k – нечетное составное число, причем $k=pq$, p – простое, НОД $(p,q)=1$,

$Q_p(x)^{\frac{1}{2}\varphi(4q)}\, t_{4q}(R_p(x)) = t_n(x)$, $n=4k$, k – нечетное составное число, $k=pq$, p –простое, НОД $(p,q)=p$,

$Q_2(x)^{\frac{1}{2}\varphi(4l)}\, t_{4l}(R_2(x)) = \pm t_n(x)$, $n=4k$, $k=2l$ – четное число.

Теорема 4. Многочлены, построенные в теоремах 1, 2, 3, неприводимы над полем рациональных чисел.

Доказательство теоремы 1 проведем индукцией по k.

Пусть $k=1$, то есть $n=3$. Очевидно, что $t_3(x)=x^2-3\in\mathbf{Z}[x]$, $\deg t_3(x)=2=\varphi(3)$. Корнями многочлена $t_3(x)$ являются числа $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$. Значит, при $k=1$ теорема верна. Предположим, что при $l<k$ и $n=2l+1$ теорема верна и докажем ее справедливость для $n=2k+1$.

Сначала рассмотрим случай, когда $n=2k+1$ – простое число. Построим уравнение $t_1(R_n(x))=0$ вида (1), есть $R_n(x)=0$. Это значит, что

$P_n(x)=(-1)^k x\,(x^{n-1}-C_n^{n-2}x^{n-3}+\ldots+$
$+(-1)^{k-1}C_n^3x^2+(-1)^k n) = (-1)^k x\,t(x)=0$. Здесь многочлен $t(x)=x^{n-1}-C_n^{n-2}x^{n-3}+\ldots+$
$+(-1)^{k-1}C_n^3x^2+(-1)^k n\in\mathbf{Z}[x]$,

$\deg t(x)=n-1=\varphi(n)$. Кроме того, имеем, что $R_n\left(\operatorname{tg}\frac{s\pi}{n}\right)=\operatorname{tg} s\pi=0$ и $R_n(\alpha)=0$ только в том случае, когда $P_n(\alpha)=0$. Отсюда следует, что числа вида $\operatorname{tg}\frac{s\pi}{n}$ будут корнями многочлена $t(x)$, причем очевидно, что в качестве s нужно брать все $\varphi(n)=n-1$ чисел, меньших n. Таким образом, если $n=2k+1$ – простое число, то существует многочлен $t_n(x)=t(x)$, о котором говорится в теореме. Он находится из формулы (2), то есть из равенства $P_n(x)=(-1)^k x t_n(x)$.

Пусть теперь $n=2k+1$ – составное число, p – его простой делитель, то есть $n=pq$, причем НОД $(p,q)=1$.

По индуктивному предположению для нечетного числа $q<n$ существует многочлен $t_q(x)$, удовлетворяющий всем требованиям теоремы. В данном случае уравнение (1) запишется в виде $t_q(R_p(x))=0$ и будет равносильным уравнению

$$f(x)\equiv Q_p(x)^{\varphi(q)}\, t_q(R_p(x))=0. \qquad (5)$$

Левая часть уравнения (5) представляет собой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами степени $p\varphi(q)$. Изучим его корни. Из того, что одним из корней многочлена $t_q(x)$ является число $\operatorname{tg}\frac{\pi}{q}$, следует, что p чисел вида $\operatorname{tg}\frac{sq+1}{pq}\pi$, где $s=0,1,2,\ldots,p-1$, будут корнями уравнения (5). Таким образом, один корень многочлена $t_q(x)$ порождает p корней уравнения (5). Покажем, что среди корней уравнения (5) будут все корни многочлена $t_q(x)$. Действительно, произвольный корень уравнения (5) имеет вид $\mathrm{tg}\frac{sq+r}{pq}\pi$, где $r<q$, НОД $(r,q)=1$, s принимает одно из значений $0,1,2,\ldots,p-1$. Дробей вида $\frac{sq+r}{pq}$ будет $p\varphi(q)$, а из них $\varphi(pq)=\varphi(p)\varphi(q)=(p-1)\varphi(q)$ дробей будут несократимы. Поэтому количество сократимых дробей равняется $p\varphi(q)-(p-1)\varphi(q)=\varphi(q)$. Так как p – простое число, НОД $(q,r)=1$, то в случае сократимости дроби имеем $\frac{sq+r}{pq}=\frac{s_1}{q}$, где НОД $(s_1,q)=1$. Значит, среди корней уравнения (5) будут $\varphi(q)$ чисел вида $\mathrm{tg}\frac{s_1}{q}\pi$, где НОД $(s_1,q)=1$, которые и являются всеми корнями многочлена $t_q(x)$. Остальные корни уравнения (5) имеют вид $\mathrm{tg}\frac{sq+r}{pq}\pi$, где $sq+r<pq$, НОД $(sq+r,pq)=1$, значит, являются корнями многочлена $t_{pq}(x)=t_n(x)$. Поэтому левая часть уравнения (5), то есть многочлен $f(x)$, будет иметь вид $f(x)=t_q(x)t_n(x)$. Таким образом, в рассмотренном случае существование искомого многочлена $t_n(x)$ доказано. Для его нахождения нужно воспользоваться формулой:

$$(Q_p(x))^{\varphi(q)}\, t_q(R_p(x))=t_q(x)\,t_n(x),\quad n=pq,\quad p$$

– простое, НОД $(p,q)=1$. Это и есть формула (3).

Пусть теперь $n=2k+1$ – составное число, p – его простой делитель, т.е. $n=pq$, причем НОД $(p,q)=p$.

Точно также как и выше строим уравнение (5). Так как $q=p^{\alpha-1}q_1$, где

НОД $(p,q_1)=1$, $\alpha\geq 2$, то $n=pq=p^{\alpha}q_1$. Поэтому $\varphi(n)=\varphi(p^{\alpha})\varphi(q_1)=(p^{\alpha}-p^{\alpha-1})\varphi(q_1)=$ $=p(p^{\alpha-1}-p^{\alpha-2})\varphi(q_1)=p\varphi(q)$. Значит, в этом случае искомым многочленом является $f(x)=t_n(x)$, то есть справедлива формула $t_n(x)=(Q_p(x))^{\varphi(q)}\,t_q(R_p(x))$. Таким образом, в случае $n=pq$, p – простое число, НОД $(p,q)=p$ получена формула (4).

Теорема 1 доказана полностью. Из-за ограниченности объема статьи доказательство теорем 2, 3, 4 мы опустим

Рассмотрим несколько примеров на применение теоремы 1.

1. Построить многочлен $t_5(x)$ с корнем $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}$.

По формуле (2) при $n=5=2\cdot 2+1$ находим $P_5(x)=x(x^4-10x^2+5)=xt_5(x)$. Таким образом, $t_5(x)=x^4-10x^2+5, \deg t_5(x)=4=\varphi(5)$. Корнями этого многочлена являются числа $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}$, $\mathrm{tg}\frac{2\pi}{5}$, $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{5}$, $\mathrm{tg}\frac{4\pi}{5}$.

2. Построить многочлен $t_9(x)$ с корнем $\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}$.

Воспользуемся формулой (4) при $p=q=3$. Имеем $t_9(x)=(Q_3(x))^{\varphi(3)}\,t_3(R_3(x))=$

$$=(1-3x^2)^2\left[\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)^2-3\right]=x^6-33x^4+27x^2-3,$$

$\deg t_9(x)=6=\varphi(9)$. корнями этого многочлена будут числа $\mathrm{tg}\frac{s\pi}{9}, s=1,2,4,5,7,8.$

3. Построить многочлен $t_{15}(x)$ с корнем $\mathrm{tg}\frac{\pi}{15}$.

При $p=5$, $q=3$ по формуле (3) имеем $(Q_5(x))^2\,t_3(R_5(x))=t_3(x)\,t_{15}(x)$.

Левая часть этого равенства имеет вид $P_5^2(x)-3Q_5^2(x)=(5x-10x^3+x^5)^2-3(1-10x^2+5x^4)^2=$ $=x^{10}-95x^8+410x^6-430x^4+85x^2-3$. Поделив этот многочлен на $t_3(x)=x^2-3$, находим $t_{15}(x)=x^8-92x^6+134x^4-28x^2+1$, $\deg t_{15}(x)=8=\varphi(15)$. Корни этого многочлена – это числа $\mathrm{tg}\frac{s\pi}{15}, s=1,2,4,7,8,11,13,14.$

Многочлены $t_n(x)$ по своим свойствам напоминают круговые многочлены $\Phi_n(x)$, корнями которых являются все первообразные корни n-ой степени из единицы. Наиболее полная информация о круговых многочленах дается в [1]. Сравним свойства многочленов $t_n(x)$ и $\Phi_n(x)$.

1. Многочлены $t_n(x)$, $\Phi_n(x)$ имеют целые коэффициенты и неприводимы в $\mathbb{Z}[x]$.

2. Для степеней этих многочленов имеем $\deg t_n(x) = \varphi(n)$, если n не сравнимо с нулем по модулю 4; $\deg t_n(x) = \frac{1}{2}\varphi(n)$ при $n \equiv 0 \pmod 4$; $\deg \Phi_n(x) = \varphi(n)$.

3. В [2] приведено равенство $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, если n – нечетно. Для многочленов $t_n(x)$ при n нечетном имеем $t_{2n}(x) = \pm x^{\varphi(n)} t_n\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. Все корни многочлена $\Phi_n(x)$ рационально выражаются через один из его корней, а именно являются степенями одного из них. Все корни многочлена $t_n(x)$ выражаются через один из его корней с помощью ранее использованной функции $R_k(x)$.

5. Многочлен $\Phi_n(x)$ является нормальным и его корни порождают нормальное расширение над полем рациональных чисел. Этим же свойством обладает и многочлен $t_n(x)$.

6. Группы Галуа многочленов $\Phi_n(x)$, $t_n(x)$ изоморфны, если n не сравнимо с нулем по модулю 4; При $n \equiv 0 \pmod 4$ группа Галуа многочлена $t_n(x)$ изоморфна подгруппе индекса 2 группы Галуа многочлена $\Phi_n(x)$.

7. Уравнения $\Phi_n(x) = 0$, $t_n(x) = 0$ разрешимы в радикалах.

Доказательство свойств, которые не являются очевидными, будет рассмотрено нами в другой работе.

* * * * * * * * * *

1. Прасолов В.В. Многочлены. 3-е изд. – М., МЦНМО, 2003.
2. Ленг С. Алгебра. – М.: "Мир", 1967.

THE CLASS OF POLYNOMIALS WITH PROPERTIES OF CIRCLED POLYNOMIALS

L.I.Galieva, I.G.Galautdinov

In the paper irreducable polynomials $t_n(x)$ with roots $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ where $n \in \mathbb{N}$ are constructed in the ring $\mathbb{Z}[x]$. The proof for the case, when n is an odd number is given.

Key words: polynomials, properties of circled polynomials

* * * * * * * * * *

Галиева Ляля Исхаковна – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета
Галяутдинов Ильдар Галяутдинович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

E-mail: mf@tggpu.ru