О.А.Широкова

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Методом возмущения исследуется изменение положения депрессионной кривой при фильтрации жидкости в зависимости от изменения поля проницаемости грунта.

Введение

Для осуществления постоянного экологического прогнозирования переноса примесей при фильтрации подземных вод важной задачей является разработка адекватных математических моделей и создание пакетов программ, позволяющих эффективно выполнять моделирование рассматриваемых процессов фильтрации и получать их оценочные численные характеристики.

Цель работы состоит в том, чтобы методом линейного программирования решить задачу об интервале разброса значений интегральных характеристик (расхода и смоченной площади грунта) фильтрационного течения при изменении коэффициента фильтрации в рамках заданной системы ограничений.

Во многих задачах фильтрации неточность исходной информации приводит к необходимости исследовать изменение их решений при вариации исходных данных [1, 2]. В связи с этим возрос интерес к изучению вариационных свойств таких задач, особенно в нелинейных случаях. Нелинейность в них может быть связана как с законом фильтрации, так и с наличием свободных границ.

Применение методов теории возмущения [3] дает возможность перейти от сложных краевых задач со свободными границами для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к линейным краевым задачам в областях с известными границами.

Таким образом, этот подход дает возможность:

1) получать решение сложной задачи, рассматривая ее как возмущение более простой, тем самым расширяется класс решаемых задач;

2) количественно исследовать вопрос об изменении решения при вариации исходных данных;

3) изучать вопрос о чувствительности решения к вариации исходных данных того или иного вида; выделение классов вариаций с различной степенью чувствительности имеет важное практическое значение.

Надо отметить, что нелинейность задач теории фильтрации связана как с законом фильтрации (физическая нелинейность), так и с наличием свободных границ (геометрическая нелинейность), причем оба эти фактора существенно осложняются неоднородностью среды. Предполагается, что неоднородность пористой среды меняется "мало". Конкретный смысл малости зависит от решаемой задачи, а также от точности, с которой необходимо получить решение.

1. Постановка задачи безнапорной фильтрации

Рассмотрим плоское фильтрационное течение жидкости через слабо неоднородную плотину произвольной формы при стационарном режиме (рис.1)

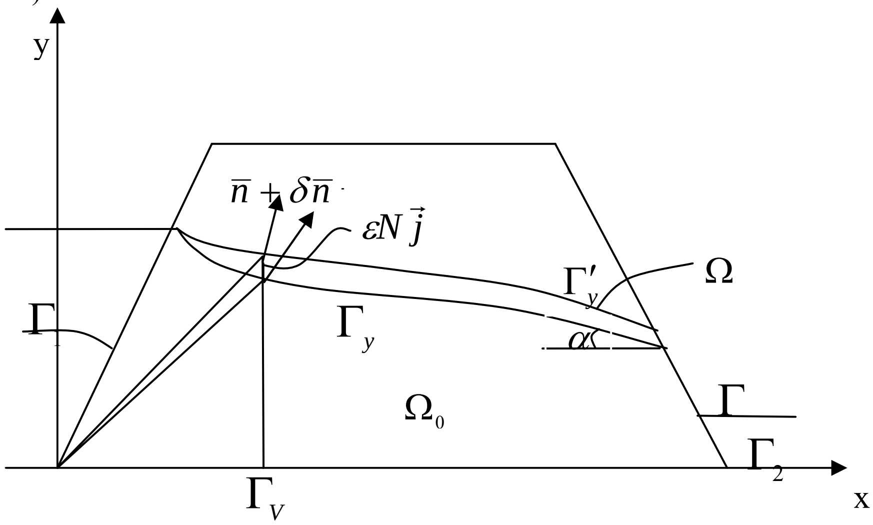


Рис.1. Фильтрационное течение жидкости через слабо неоднородную плотину произвольной формы

Краевая задача для функции напора h(x,y) в области течения Ω имеет вид [4]:

$$\vec{U}=-K(x,y)\cdot\nabla h\,,\qquad divU=0\,,\qquad (x,y)\in\Omega,$$
$$\partial h/\partial n=0\qquad,\qquad (x,y)\in\Gamma_v\,;$$
$$h=h_i,\ (x,y)\in\Gamma_i,\ \ i=1,2; \tag{1}$$
$$p=\rho g(h(x,y)-y)=0\ ,\ (x,y)\in\Gamma_P\,;$$
$$p=0,\ \partial h/\partial n=0,\ (x,y)\in\Gamma'_y\,,$$

где p- давление, ρgy- гидростатическое давление, ρ- плотность жидкости, g-ускорение свободного падения, K(x,y)- коэффициент фильтрации, Γ_y ’- депрессионная кривая, Γ_v – непроницаемое основание, Γ_P – участок высачивания, Γ_i (i=1,2) – границы верхнего и нижнего бьефов с напорами h_i .

Поскольку грунт слабонеоднородный, то будем считать, что фильтрационное течение в Ω есть результат возмущения "опорного" течения в однородном грунте [5].

Имеем K(x,y)=Ko+εχ(x,y), ε<<1, где εχ(x,y) – малое возмущение коэффициента фильтрации, Ko=Const.

Вариация коэффициента фильтрации εχ(x,y) приводит к смещению $\delta y = \varepsilon N(x)\overline{j}$ кривой депрессии Γ_y опорного течения и к возмущениям $\varepsilon\varphi(x,y)$, $\varepsilon\overline{v}(x,y)$ и δQ напора h_0, скорости $\overline{U}$ и расхода Q в исходной области фильтрации Ωo.

Применение метода малых возмущений требует выполнения следующих предположений: положим, что функции $h_0(x,y)$ и φ(x,y) определены в точках исходной области и в возмущенной области и дифференцируемы там. Используя разложение функций из (1) в ряд по малому параметру ε (с точностью до ε^2) получим краевую задачу для вариации напора φ(x,y) в области Ωo.

Имеем: $\overline{U} + \varepsilon\overline{V} = -(K_0 + \varepsilon\chi)\nabla(h_0 + \varepsilon\varphi),\ div(\overline{U} + \varepsilon\overline{V}) = 0$.

Приравнивания коэффициенты при ε в разложениях обеих частей уравнений, получим [8, 9, 10]:

$$\overline{V} = -\chi\nabla h_0 - K_0\nabla\varphi,\ div\overline{V} = 0 .$$

Следовательно,

$$\Delta\varphi = -K_0^{-1}(\nabla h_0 \cdot \nabla\chi) . \qquad (2)$$

На непроницаемом основании Γ_v краевое условие для φ(x,y) имеет вид:

$$\partial\varphi/\partial n = 0 . \qquad (3)$$

На линиях входа и выхода потока Γ_i (i=1,2), а также на участке высачивания Γ_p :

$$\varphi=0. \qquad (4)$$

На кривой депрессии Γ_y :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\sin\alpha\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\varphi}{1-\partial h_0/\partial y}\right] + \frac{\varphi}{1-\partial h_0/\partial y}\left[\frac{\partial^2 h_0}{\partial x\partial y}\sin\alpha - \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2}\cos\alpha\right] . \qquad (5)$$

Итак, для стационарного течения получим краевую задачу (2)-(5) для вариации напора φ(x,y) в области Ω_0 для плотины произвольной формы.

2. Модельная задача. Фильтрационное стекание по наклонному водоупору в слабонеоднородном грунте

Для иллюстрации метода возмущений изучим изменение положения депрессионной кривой при фильтрации жидкости из водоема по наклонному водоупору в зависимости от изменения поля проницаемости грунта. Рассмотрим плоскую модельную стационарную задачу о фильтрационном стекании жидкости через слабонеоднородный грунт, подстилаемый наклонным водоупором Γ_v. Движение жидкости подчиняется закону Дарси, а водоупор прямолинеен и составляет с горизонталью угол α $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$ (рис. 2):

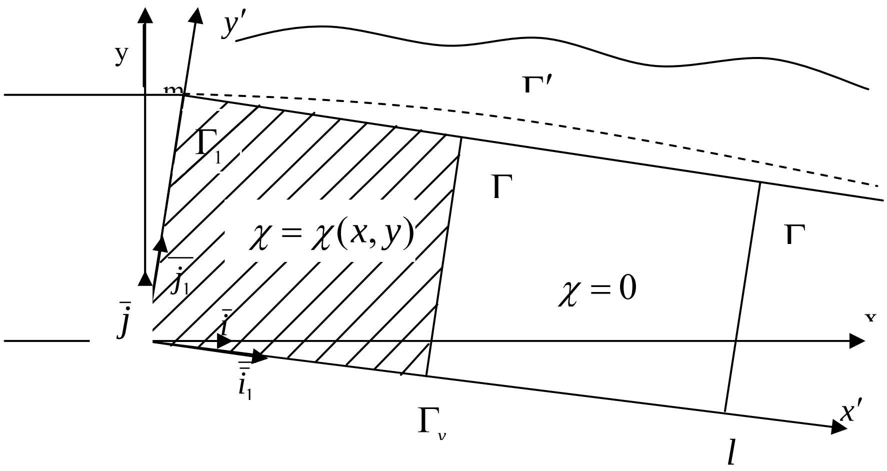


Рис. 2. Фильтрационное стекание жидкости через слабонеоднородный грунт

Тогда задача (2)- (5) сводится к следующей [8]:

$$\Omega_0: \Delta\varphi = K_0^{-1} \cdot \sin\alpha \cdot \frac{d\chi}{dx},$$

$$\Gamma_1: \varphi = 0;\ \Gamma_2: \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,\ \Gamma_\nu: \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

$$\Gamma_y: \sin\alpha \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\alpha \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Представим решение задачи (6) в виде суммы частного решения неоднородного уравнения V(x) и общего решения краевой задачи для однородного уравнения U(x,y), то есть имеем: $\varphi(x,y) = V(x) + U(x,y)$

В качестве итерационного метода решения данной задачи выбран строчный метод Зейделя с прогонками по двум направлениям [6].

3. Возмущение фильтрационного стекания

Изучим изменение положения депрессионной кривой и интегральных характеристик решения стационарной задачи при различных положениях неоднородных включений в плоской области фильтрации Ω [10].

Такими характеристиками, в частности, являются вариации расхода $\frac{\delta Q}{\varepsilon}$ и смоченной области грунта $\frac{\delta S}{\varepsilon}$. Они, в свою очередь, определяются решениями φ краевых задач (6), зависящими от выбора функции $\chi(x,y)$.

Рассмотрим задачу о неоднородном включении для случая $\chi = \chi(x)$.

Рассмотрим семейство функций

$$\chi(x)=\sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x); \qquad (7)$$

где c_i – произвольные константы,
N – целое число,
$f_i(x)$ – линейные функции – "крышки".

$$f_i(x)=\begin{cases}(x-x_{i-1})/h_{i-1},\ x\in[x_{i-1},x_i],\ h_i=x_{i+1}-x_i;\\(x_{i+1}-x)/h_i,\ x\in[x_i,x_{i+1}];\\0,\ x\notin[x_{i-1},x_{i+1}];\end{cases}$$

$$i=\overline{1,N}\ ,\ 0=x_1<x_2<\ldots<x_N=1;$$

$$f_1(x)=\begin{cases}(x_2-x)/h_1\ ,\ x\in[x_1,x_2]\\0\ ,\ x\notin[x_1,x_2]\end{cases}$$

$$f_N(x)=\begin{cases}(x-x_{N-1})/h_{N-1}\ ,\ x\in[x_{N-1},x_N]\\0\ ,\ x\notin[x_{N-1},x_N]\end{cases}$$

Можно рассматривать $\{f_i\}$ как базисные неоднородности. В силу линейности краевой задачи (6) ее решение можно представить в виде:

$$\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x,y), \qquad (8)$$

где φ_i – решение указанной задачи при $\chi=f_i(x)$. Назовем φ_i откликом на базисные функции f_i (базисным откликом).

Использование базисных неоднородностей дает возможность, с одной стороны, получить базисные отклики для метода сплайн-аппроксимации, а с другой стороны, для случая $\chi=\chi(x)$ решить задачу о неоднородном включении в виде вертикального слоя $\chi=f_i(x)$. Положение неоднородного включения варьируется по x. Форма включения неизменна. Для получения базисных откликов φ_i необходимо решить задачу (6) для каждой базисной функции f_i.

4. Численное решение. Вопросы чувствительности

Рассмотрим вопрос о чувствительности расхода Q и смоченной площади грунта S к изменению коэффициента фильтрации [2]. Вариации $\dfrac{\delta Q}{\varepsilon}$ и $\dfrac{\delta S}{\varepsilon}$ являются функционалами от решения $\varphi(x,y)$, которое определяется исходной функцией $\chi(x,y)$. Неопределенность исходной информации о коэффициенте фильтрации K(x,y) выразим условием $\chi(x,y)\in R,$ где R- заданное множество. Таким образом, для $F(\chi) = \delta Q / \varepsilon$ (или $\dfrac{\delta S}{\varepsilon}$) имеем вариационные задачи:

$$\sup_{\chi \in R} F(\chi), \quad \inf_{\chi \in R} F(\chi) \tag{9}$$

Пусть множество R состоит из функции $\chi(x)$. Учитывая (8), получим, что функционалы $\dfrac{\delta Q}{\varepsilon}$ (или $\dfrac{\delta S}{\varepsilon}$) могут быть представлены в виде:

$$J(C_i) = \sum_{i=1}^{N} C_i A_i, \tag{10}$$

где $A_i = \int\limits_{\Gamma_1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \int\limits_{\Gamma_1} f_i \dfrac{\partial h}{\partial n} dS$ (для $\dfrac{\delta Q}{\varepsilon}$)

$A_i = \cos^{-2} \alpha \int\limits_{\Gamma_y} \varphi_i(x,m) dx$ (для $\dfrac{\delta S}{\varepsilon}$)

Следовательно, задачи (9) сводятся к нахождению экстремумов линейной функции (10) при дополнительных ограничениях на искомые параметры C_i [7].

Пусть множество R характеризуется следующими ограничениями:

$$1)\ \underline{D} \le C_i \le \overline{D_1},\ \underline{D} = -\overline{D_1} = const; \tag{11}$$

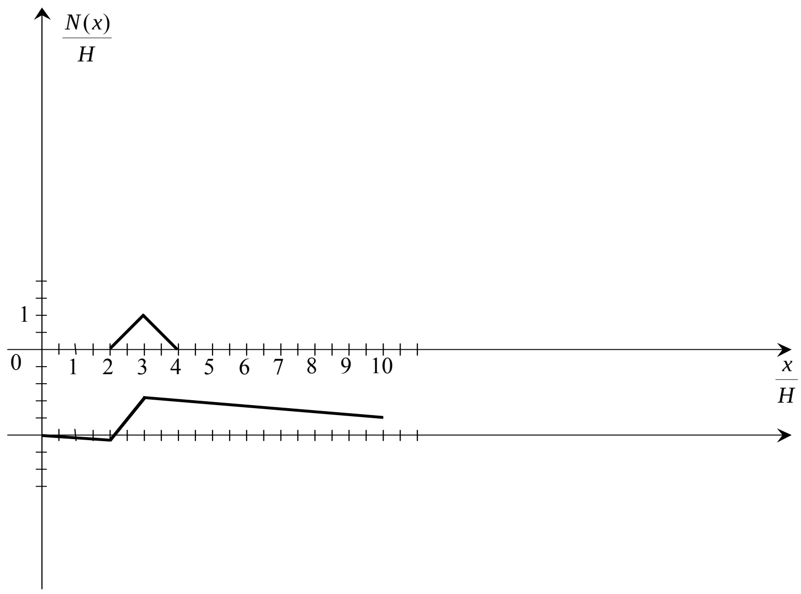
$$2)\ \max_{x \in \Delta_0} \sum_{i=1}^{N} C_i N_i(x) \le \varepsilon_1,\ \Delta_0 \in [0, l] \tag{12}$$

При этом задача о нижней границе интервала разброса вырождается: inf J=0 при $\chi = 0$. Определение верхней границы сводится к решению задачи линейного программирования.

Исследована чувствительность одной из важных фильтрационных характеристик – смоченной площади грунта в задаче о фильтрационном стекании по наклонному водоупору в слабо неоднородном грунте.

Анализ численных результатов показывает, что на участке $(4h, 10h)$ имеет место малая чувствительность изменения смоченной площади к изменению проницаемости. На участке же $\Delta_0 = (2h, 3h)$ чувствительность δS на ограничение (12) более сильная.

Благодаря полученным результатам мы можем судить о величине отклонения свободной границы (рис 3, 4).



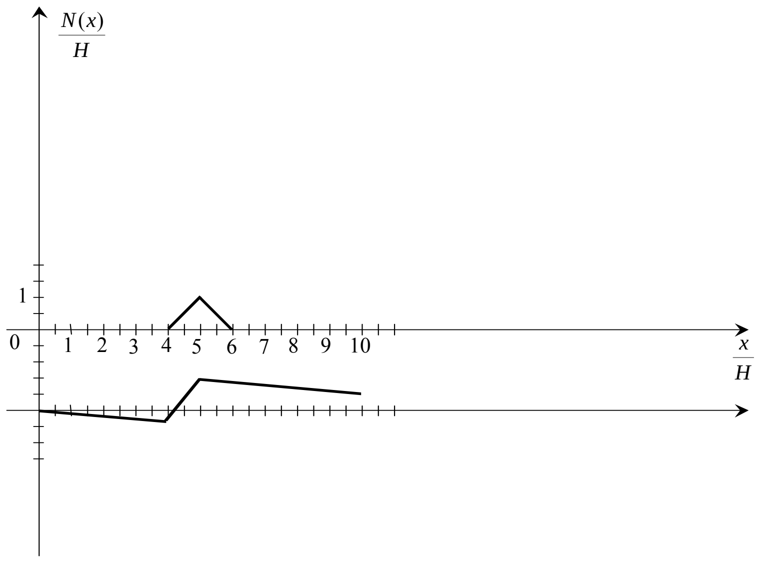


Рис. 3.

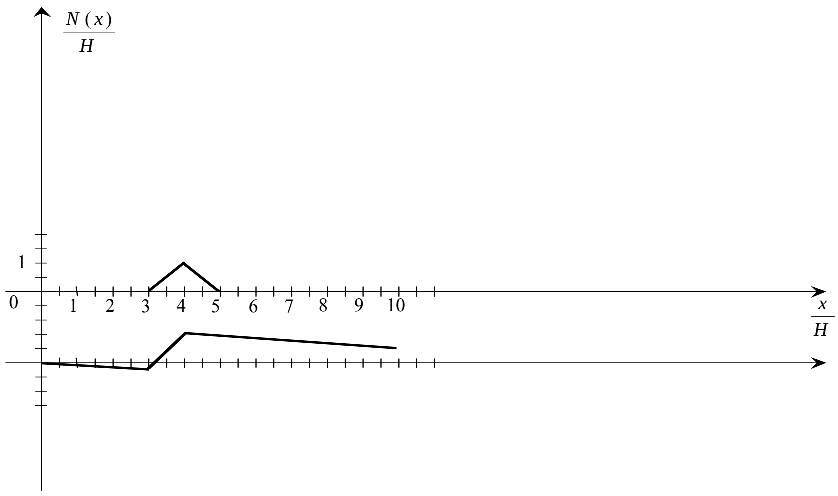


Рис. 4.

Литература

[1] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., 1989.

[2] Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М., 1992.

[3] Найфе А. Введение в методы возмущений. М., 1984.

[4] Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М., 1987.

[5] Dagan G. Second order linearized theory of free-surface flow in porous media// La Houille Blanche. 1964. №8. P.901-910.

[6] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

[7] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980.

[8] Широкова О.А. Метод возмущений в задачах фильтрации со свободными границами //Дисс. канд. физ.-мат. наук. Казань, 1993.

[9] Костерин А.В., Широкова О.А. Возмущение решений краевых задач со свободными границами // Моделирование в механике. 1992. Т.6(23). №4. С.33-40.

[10] Широкова О.А. О вопросах чувствительности в задачах фильтрации со свободными границами// Труды IV межд. конф. женщин-математиков. Н.Новгород. 1997. Вып.2. Т.4. С.119-125.