Е.А.Уткина

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Строится решение обобщения уравнения Вольтерра в n-мерном пространстве (n – любое натуральное конечное число) с помощью резольвент. Отличие от ранее изученных уравнений состоит в присутствии слагаемых с другим порядком интегрирования. Сначала все рассуждения проведены для $n=2$.

Речь пойдет об уравнении вида

$$u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)+$$

$$+\lambda\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n}\ldots\sum_{\substack{i_n=0\\ i_1+i_2+\ldots+i_n>0}}^{n} D_{x_{i_1}}^{-1}D_{x_{i_2}}^{-1}\ldots D_{x_{i_n}}^{-1} \tag{1}$$

$$\Big[K_{i_1i_2\ldots i_n}\left(x_1,x_2,...,x_n,t_1\operatorname{sgn}i_1+x_1(1-\operatorname{sgn}i_1),t_2\operatorname{sgn}i_2+x_2(1-\operatorname{sgn}i_2),...,t_n\operatorname{sgn}i_n+\right.$$

$$\left.x_n(1-\operatorname{sgn}i_n)\right)\cdot u\left(t_1\operatorname{sgn}i_1+x_1(1-\operatorname{sgn}i_1),t_2\operatorname{sgn}i_2+x_2(1-\operatorname{sgn}i_2),...,\right.$$

$$\left.t_n\operatorname{sgn}i_n+x_n(1-\operatorname{sgn}i_n)\right)\Big],$$

заданном в области $D=\left\{x_{10}\le x_1\le x_{11},x_{20}\le x_2\le x_{21},...,x_{n0}\le x_n\le x_{n1}\right\}$. При $n=1$ (1) есть классическое уравнение Вольтерра, при $n=2$ и равных нулю функциях K_{11}, K_{22}, K_{21} оно тоже хорошо известно [1, §28], [2,§3], [3,с.9]. При любом конечном n и равных нулю коэффициентах $K_{1\ldots1}$, $K_{21\ldots1}$,…, $K_{n\ldots n}$ это уравнение изучено в [4]. Основное отличие (1) от выше перечисленных случаев состоит в том, что в нем присутствуют кратные интегралы по различным переменным, но с одинаковым верхними пределами. Подобные интегральные уравнения встречаются при исследовании задач со смещениями в граничных условиях. Далее для более компактной записи получающихся в процессе рассуждений формул будем использовать обозначения, введенные в [5]. А именно, $D_t^k\varphi\equiv\partial^k\varphi/\partial t^k$ при $k=1,2,..$ и $D_t^k\varphi\equiv\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\left(t-\tau\right)^{-k-1}\varphi\left(\tau\right)}{\left(-k-1\right)!}d\tau$, если $k=-1,-2,..,D_t^0$ – оператор тождественного преобразования. Если некоторый индекс $i_k=0$, это означает, что соответствующий интеграл отсутствует. Проведем все рассуждения сначала при $n=2$. Уравнение (1) упростится:

$$u\left(x_1,x_2\right)=f\left(x_1,x_2\right)+\lambda\sum_{i_1=0}^{2}\sum_{\substack{i_2=0\\ i_1+i_2>0}}^{2} D_{x_{i_1}}^{-1}D_{x_{i_2}}^{-1} \tag{2}$$

$$\Big[\;K_{i_1i_2}\left(x_1,x_2,t_1\operatorname{sgn}i_1+x_1(1-\operatorname{sgn}i_1),t_2\operatorname{sgn}i_2+x_2(1-\operatorname{sgn}i_2)\right)\cdot$$

$$\cdot u\left(t_1\operatorname{sgn}i_1+x_1(1-\operatorname{sgn}i_1),t_2\operatorname{sgn}i_2+x_2(1-\operatorname{sgn}i_2)\right)\;\Big].$$

Формально введем еще одну функцию:

$$K_{00}\left(x_1,x_2,x_1,x_2\right)=\frac{f\left(x_1,x_2\right)}{\lambda u\left(x_1,x_2\right)}.$$

Применим к (2) метод последовательных приближений:

$$u\left(x_1,x_2\right)=f\left(x_1,x_2\right)+\lambda^2\sum_{i_1=0}^{2}\sum_{\substack{i_2=0\\ i_1+i_2>0}}^{2} D_{x_{i_1}}^{-1}D_{x_{i_2}}^{-1}$$

$$\Big[K_{i_1i_2}\left(x_1,x_2,\operatorname{sgn} i_1(t_1-x_1)+x_1,\operatorname{sgn} i_2(t_2-x_2)+x_2\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{i_{11}=0}^{2}\sum_{i_{21}=0}^{2}D_{x_{i_{11}}}^{-1}D_{x_{i_{21}}}^{-1}K_{i_{11}i_{21}}\left(x_{11},x_{21},\operatorname{sgn} i_{11}(t_{11}-x_{11})+x_{11}),\operatorname{sgn} i_{21}(t_{21}-x_{21})+x_{21}\right)$$

$$u\left(\operatorname{sgn} i_{11}(t_{11}-x_{11})+x_{11}),\operatorname{sgn} i_{21}(t_{21}-x_{21})+x_{21}\right)\Big],$$

где $x_{11}=\operatorname{sgn} i_1(t_1-x_1)+x_1$, $x_{21}=\operatorname{sgn} i_2(t_2-x_2)+x_2$. Выделим во втором наборе сумм слагаемые, у которых $i_{11}=i_{21}=0$:

$$u\left(x_1,x_2\right)=f\left(x_1,x_2\right)+\lambda^2\sum_{i_1=0}^{2}\sum_{\substack{i_2=0\\ i_1+i_2>0}}^{2} D_{x_{i_1}}^{-1}D_{x_{i_2}}^{-1}$$

$$\Big[\ K_{i_1i_2}\left(x_1,x_2,x_{11},x_{21}\right)\cdot K_{00}\left(x_{11},x_{21},x_{11},x_{21}\right)u\left(x_{11},x_{21}\right)\ \Big]+$$

$$+\lambda^2\sum_{i_1=0}^{2}\sum_{\substack{i_2=0\\ i_1+i_2>0}}^{2}\Big[\ D_{x_{i_1}}^{-1}D_{x_{i_2}}^{-1}K_{i_1i_2}\left(x_1,x_2,x_{11},x_{21}\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{i_{11}=0}^{2}\sum_{\substack{i_{21}=0\\ i_{11}+i_{21}>0}}^{2} D_{x_{i_{11}}}^{-1}D_{x_{i_{21}}}^{-1}K_{i_{11}i_{21}}\left(x_{11},x_{21},\operatorname{sgn} i_{11}(t_{11}-x_{11})+x_{11}),\operatorname{sgn} i_{21}(t_{21}-x_{21})+x_{21}\right)\cdot$$

$$u\left(\operatorname{sgn} i_{11}(t_{11}-x_{11})+x_{11}),\operatorname{sgn} i_{21}(t_{21}-x_{21})+x_{21}\right)\ \Big].$$

С учетом обозначений $x_{12}=\operatorname{sgn} i_{11}(t_{11}-x_{11})+x_{11}$, $x_{22}=\operatorname{sgn} i_{21}(t_{21}-x_{21})+x_{21}$ последняя формула примет вид

$$u\left(x_1,x_2\right)=f\left(x_1,x_2\right)+\lambda^2\sum_{i_1=0}^{2}\sum_{\substack{i_2=0\\ i_1+i_2>0}}^{2}\Big[D_{x_{i_1}}^{-1}D_{x_{i_2}}^{-1}K_{i_1i_2}\left(x_1,x_2,x_{11},x_{21}\right)\cdot$$

$$\cdot K_{00}\left(x_{11},x_{21},x_{11},x_{21}\right)u\left(x_{11},x_{21}\right)\Big]+$$

$$+\lambda^2\sum_{i_1=0}^{2}\sum_{\substack{i_2=0\\ i_1+i_2>0}}^{2}\Big[D_{x_{i_1}}^{-1}D_{x_{i_2}}^{-1}K_{i_1i_2}\left(x_1,x_2,x_{11},x_{21}\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{i_{11}=0}^{2}\sum_{\substack{i_{21}=0\\ i_{11}+i_{21}>0}}^{2} D_{x_{i_{11}}}^{-1}D_{x_{i_{21}}}^{-1}K_{i_{11}i_{21}}\left(x_{11},x_{21},x_{12},x_{22}\right)u\left(x_{12},x_{22}\right)\Big].$$

Продолжая подстановку, мы получим бесконечный ряд:

$$u\left(x_1,x_2\right)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\lambda^{k_1}\prod_{k_2=1}^{k_1}S_{k_2}\left(x_{1k_2-1},x_{2k_2-1},x_{1k_2},x_{2k_2}\right)f\left(x_{1k_2},x_{2k_2}\right)+f\left(x_1,x_2\right). \qquad (3)$$

Под S_k понимаем операторы, действующие по правилу (выпишем это правило для $k=1,2$. Понятно, что для k>2 эта процедура может быть продолжена):

$$S_1(x_1,x_2,x_{11},x_{21})f(x_{11},x_{21})=\lambda\sum_{\substack{i_1=0\\ i_1+i_2>0}}^{2}\sum_{i_2=0}^{2}\left[D_{x_{i_1}}^{-1}D_{x_{i_2}}^{-1}K_{i_1i_2}(x_1,x_2,x_{11},x_{21})f(x_{11},x_{21})\right],$$

$$S_1(x_1,x_2,x_{11},x_{21})S_2(x_{11},x_{21},x_{12},x_{22})f(x_{12},x_{22})=$$

$$=\lambda^2\sum_{\substack{i_1=0\\ i_1+i_2>0}}^{2}\sum_{i_2=0}^{2}\left[D_{x_{i_1}}^{-1}D_{x_{i_2}}^{-1}K_{i_1i_2}(x_1,x_2,x_{11},x_{21})\cdot\right.$$

$$\cdot\sum_{\substack{i_{11}=0\\ i_{11}+i_{21}>0}}^{2}\sum_{i_{21}=0}^{2}\left[D_{x_{i_{11}}}^{-1}D_{x_{i_{21}}}^{-1}K_{i_{11}i_{21}}(x_{11},x_{21},x_{12},x_{22})\right.$$

и так далее. Полученный в (3) ряд является обобщением понятия резольвенты, известного (например, из [6]) для уравнения

$$u(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)+\lambda D_{x_1}^{-1}D_{x_2}^{-1}$$

$$[\ K_{12}(x_1,x_2,t_1,t_2)u(t_1,t_2)\ ]+\lambda D_{x_1}^{-1}[\ K_{10}(x_1,x_2,t_1,x_2)u(t_1,x_2)\ ]+$$

$$+\lambda D_{x_2}^{-1}[\ K_{12}(x_1,x_2,x_1,t_2)u(x_1,t_2)\ ],$$

$$\lambda=const\,.$$

Теорема. *Пусть в (2) функции* $K_{i_1i_2}(x_1,x_2,t_1,t_2)$ $(i_1,i_2=0,1,2,i_1+i_2>0)$ *непрерывны в* $\{x_{10}\le x_1\le x_{11},x_{20}\le x_2\le x_{21},x_{10}\le t_1\le x_{11},x_{20}\le t_2\le x_{21}\}$, $f(x_1,x_2)$ *– непрерывна в D, тогда уравнение (2) имеет единственное непрерывное решение* $u(x_1,x_2)$, *которое представимо абсолютно и равномерно сходящимся рядом (3).*

Для доказательства рассмотрим общий член ряда

$$V_{k_1}(x_1,x_2)=\lambda^{k_1}\prod_{k_2=1}^{k_1}S_{k_2}(x_{1k_2-1},x_{2k_2-1},x_{1k_2},x_{2k_2})f(x_{1k_2},x_{2k_2})\,.$$

В силу непрерывности функций $K_{i_1i_2}(x_1,x_2,t_1,t_2)$ $(i_1,i_2=0,1,2,i_1+i_2>0)$ в замкнутом параллелепипеде они ограничены. Следовательно, существует некоторая положительная постоянная M такая, что $\left|K_{i_1i_2}(x_1,x_2,t_1,t_2)\right|\le M$. Тогда V_{k_1} не превосходит

$$\left|V_{k_1}(x_1,x_2)\right|\le|\lambda|^{k_1}N|M|^{k_1}5^{k_1}\frac{(x_1-x_{10})^{k_1}(x_2-x_{20})^{k_1}}{k_1!}\le$$

$$\le|\lambda|^{k_1}N|M|^{k_1}5^{k_1}\frac{(x_{11}-x_{10})^{k_1}(x_{21}-x_{20})^{k_1}}{k_1!}\,.$$

Известно, что ряд с положительным общим членом $|\lambda|^{k_1}N|M|^{k_1}5^{k_1}\dfrac{(x_{11}-x_{10})^{k_1}(x_{21}-x_{20})^{k_1}}{k_1!}$ сходится при всех значениях чисел λ,

N, M, $(x_{11}-x_{10}),(x_{21}-x_{20})$. Поэтому ряд в (3) сходится абсолютно и равномерно.

Вернемся теперь к (1). Будем использовать мультииндексы. Так, (1) с их помощью преобразуется к виду:

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{\substack{i=0\\ i>0}}^{n} D_{x_i}^{-1}\left[K_i\left(x,t\operatorname{sgn}i+x(1-\operatorname{sgn}i)\right)u\left(t\operatorname{sgn}i+x(1-\operatorname{sgn}i)\right)\right], \qquad (4)$$

где

$$x=(x_1,x_2,...,x_n),\ \sum_{\substack{i=0\\ i>0}}^{n} =\sum_{\substack{i_1=0\\ i_1+i_2+...+i_n>0}}^{n}\ \sum_{i_2=0}^{n}...\sum_{i_n=0}^{n},\ D_{x_i}^{-1}=D_{x_{i_1}}^{-1}D_{x_{i_2}}^{-1}...D_{x_{i_n}}^{-1},\ \lambda=const,$$

$t\operatorname{sgn}i+x(1-\operatorname{sgn}i)=t_1\operatorname{sgn}i_1+x_1(1-\operatorname{sgn}i_1)$,

$t_2\operatorname{sgn}i_2+x_2(1-\operatorname{sgn}i_2),...,t_n\operatorname{sgn}i_n+x_n(1-\operatorname{sgn}i_n)$.

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что резольвента (4) имеет вид

$$u(x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\lambda^k\prod_{k_2=1}^{k_1} S_{k_2}\left(x_{k_2-1},x_{k_2}\right)f\left(x_{k_2}\right)+f(x). \qquad (5)$$

Здесь

$$S_1(x,x_1)f(x_1,x_2)=\lambda\sum_{\substack{i=0\\ i>0}}^{n}\left[\ D_{x_i}^{-1}K_i(x,x_1)f(x_1)\ \right],$$

$$S_1(x,x_1)S_2(x_1,x_2)f(x_2)=\lambda^2\sum_{\substack{i=0\\ i>0}}^{n}\left[\ D_{x_i}^{-1}K_i(x,x_1)\sum_{\substack{i_1=0\\ i_1>0}}^{n}\left[\ D_{x_{i_1}}^{-1}K_{i_1}(x_1,x_2),\ldots\right.\right.$$

Таким образом, имеет место теорема

Теорема. *Если функции $K_i(x,t)$, $f(x)$ $(i=\overline{0,n}, i>0)$ непрерывны в $\{x_{10}\le x_1\le x_{11},..x_{n0}\le x_n\le x_{n1},x_{10}\le t_1\le x_{11},...x_{n0}\le t_n\le x_{n1}\}$, то уравнение (4) имеет единственное непрерывное решение $u(x)$, представимое в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда (5).*

Литература

[1] Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Т.I. М., 1934.

[2] Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л., 1948.

[3] Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными// Казанское математическое общ-во. 2001.

[4] Севастьянов В.А. Существование и единственность решения одного многомерного интегрального уравнения/ Казан.ун-т, 1997. - Деп. В ВИНИТИ 05.06.97, №1848-В97.

[5] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А.Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка// ДАН СССР. 1987. Т.297. №3. С547-552.

[6] Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения//ГТТИ. 1933.