УДК 517.95

# РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ В-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

**© Э.В.Чеботарева**

В данной работе строятся фундаментальное решение и потенциалы типа простого и двойного слоев для одного вырождающегося В-эллиптического уравнения первого рода. С помощью этих потенциалов краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается единственность их решения.

Пусть $E_p^{++}$ − четверть $x_p > 0$, $x_{p-1} > 0$ $p$-мерного евклидова пространства точек $x = (x', x_{p-1}, x_p) = (x'', x_p)$, $x' = (x_1, x_2, ..., x_{p-2})$, $x'' = (x', x_{p-1})$, $\Omega$ − конечная область в $E_p^{++}$, ограниченная гиперповерхностью $\Gamma$ и частями $\Gamma_0$ и $\Gamma_1$ гиперплоскостей $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ соответственно, $\Omega_e = E_p^{++} \setminus (\Omega \bigcup \Gamma)$.

Рассмотрим в $E_p^{++}$ вырождающееся В-эллиптическое уравнение

$$L[u(x)] = x_p^m \left(\Delta_{x'} u + B_{x_{p-1}} u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} = 0, \qquad (1)$$

где $\Delta_{x'} = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $B_{x_{p-1}} = \frac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} + \frac{k}{x_{p-1}} \frac{\partial}{\partial x_{p-1}}$ − оператор Бесселя, $m > 0$, $k > 0$ − постоянные, $p \geq 3$.

## 1. Фундаментальное решение и интегральное представление фундаментального решения

Известно [1], что фундаментальное решение уравнения (1) имеет вид:

$$\mathscr{E}(x, x_0) = BC_k \frac{\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}} \Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(\frac{\gamma-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right)} \times \qquad (2)$$

$$\times (x_p x_{p_0})^{-\frac{m}{4}} (x_{p-1} x_{p-1_0})^{-\frac{m}{2}} \rho_{xx_0}^{2-p} + $$
$$+ R(x, x_0) = \mathscr{E}^*(x, x_0) + R(x, x_0),$$

где $R(x, x_0)$ − регулярная функция в точке $x_0$, $B$ − некоторая постоянная,

$$\rho_{xx_0} = \left[ |x' - x_0'|^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \left( x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$C_k^{-1} = \int_0^{\pi} \sin^{k-1} \varphi d\varphi = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

Фундаментальное решение уравнения (1) обладает следующими свойствами:

$$\lim_{x_p \to 0} \mathscr{E}(\xi, x) = \lim_{\xi_p \to 0} \mathscr{E}(\xi, x) = 0, \qquad (3)$$

$$\lim_{x_p \to 0} \frac{\partial \mathscr{E}(\xi, x)}{\partial \xi_p} = \lim_{\xi_p \to 0} \frac{\partial \mathscr{E}(\xi, x)}{\partial x_p} = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}(\xi, x)}{\partial x_p} = O(1) \text{ при } x_p \to 0,$$
$$\frac{\partial \mathscr{E}(\xi, x)}{\partial \xi_p} = O(1) \text{ при } \xi_p \to 0, \qquad (5)$$

$$\mathscr{E}(x, x_0) = O\left( \left( \rho_{xx_0}^2 \right)^{-\left( \frac{\gamma-2}{2} + \frac{m+4}{2(m+2)} \right)} \right) \qquad (6)$$

при $|x| \to \infty$,

$$A[\mathscr{E}(x, x_0)] = O\left( \left( \rho_{xx_0}^2 \right)^{-\left( \frac{\gamma-2}{2} + \frac{m+4}{2(m+2)} \right)} \right) \qquad (7)$$

при $|x| \to \infty$.

Обозначим через $C_B^1(\Omega \bigcup \Gamma_0)$ множество четных по $x_{p-1}$, один раз непрерывно дифференцируемых в $\Omega \bigcup \Gamma_0$ функций. Пусть $u, v \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C_B^1(\Omega \bigcup \Gamma_0)$. В работе [1] были получены следующие формулы

$$\int_\Omega v L(u) x_{p-1}^k dx + \int_\Omega \left[ x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_p} \frac{\partial u}{\partial x_p} \right] x_{p-1}^k dx =$$
$$= \int_\Gamma v A[u] \xi_{p-1}^k d\Gamma + \int_{\Gamma_1} v(\xi', 0) \frac{\partial u(\xi', 0)}{\partial \xi_p} \xi_{p-1}^k d\xi', \qquad (8)$$

$$\int_\Omega \left( vL(u) - uL(v) \right) x_{p-1}^k dx = \int_\Gamma \left( vA[u] - uA[v] \right) \xi_{p-1}^k d\Gamma +$$
$$+ \int_{\Gamma_1} \left( v(\xi', 0) \frac{\partial u(\xi', 0)}{\partial \xi_p} - u(\xi', 0) \frac{\partial v(\xi', 0)}{\partial \xi_p} \right) \xi_{p-1}^k d\xi', \qquad (9)$$

где $A = \xi_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \cos(n, \xi_j) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \cos(n, \xi_p) \frac{\partial}{\partial \xi_p}$ − конормальная производная, $n$ − внешняя нормаль к границе $\Gamma$. Формулы (8) и (9) называются, соответственно, первой и второй формулами Грина для оператора $L$.

Пусть функция $u(x)\in C^2\left(\Omega\right)\bigcap C^1\left(\overline{\Omega}\right)\bigcap C_B^1\left(\Omega\bigcup\Gamma_0\right)$ является решением уравнения (1) в области $\Omega$ и $x_0\in\Omega$. В [1] показано, что если при этом выполняется условие $\lim\limits_{x_p\to 0}u(x)=0$, то интегральное представление для $u(x)$ имеет вид

$$u(x_0)=\int\limits_\Gamma\left(\mathscr{E}(\xi,x_0)A[u]-uA[\mathscr{E}(\xi,x_0)]\right)\xi_{p-1}^k d\Gamma\cdot \tag{10}$$

Из интегрального представления (10) вытекает следующее свойство решения уравнения (1)

**Теорема 1. (Принцип максимума).** *Если $u(x)\in C^2\left(\Omega\right)\bigcap C^1\left(\overline{\Omega}\right)\bigcap C_B^1\left(\Omega\bigcup\Gamma_0\right)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $\lim\limits_{x_p\to 0}u(x)=0$, то функция $u(x)$ достигает своего положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значений на границе $\Gamma$, если она не равна 0.*

**Доказательство.** Предположим, что функция $u(x)\in C^2\left(\Omega\right)\bigcap C^1\left(\overline{\Omega}\right)\bigcap C_B^1\left(\Omega\bigcup\Gamma_0\right)$ удовлетворяет уравнению (1) и достигает своего положительного наибольшего значения в некоторой внутренней точке $M_0\left(x_0\right)$ области $\Omega$. Тогда существует $\delta$- окрестность точки $x_0$, в которой $u(x)<u(x_0)$ при $x\neq x_0$ и $u(x)>0$. Пусть $S_{x_0\delta}$ – сфера с центром в точке $x_0$ и радиусом $\delta$. Полагая в интегральном представлении решения $u(x)$ $\Gamma=S_{x_0\delta}$, получим

$$\begin{aligned}u(x_0)=&\int\limits_{S_{x_0\delta}}\mathscr{E}(\xi,x_0)A\left[u(x)\right]\xi_{p-1}^k dS_{x_0\delta}-\\&-\int\limits_{S_{x_0\delta}}u(x)A\left[\mathscr{E}(\xi,x_0)\right]\xi_{p-1}^k dS_{x_0\delta}=I_1+I_2.\end{aligned} \tag{11}$$

Так как $u(x)>0$ и $\mathscr{E}(x,x_0)>0$, а конормаль $A$ является внешней по отношению к сфере $S_{x_0\delta}$, то $A\left[u(x)\right]<0$ и $A\left[\mathscr{E}(\xi,x_0)\right]<0$, а значит, $I_1$ и $I_2$ имеют разные знаки. Если $I_1<0$ и $I_2>0$, то при $\delta\to 0$ $I_1$, возрастая, стремится к нулю, а $I_2$, возрастая, стремится к $u(x_0)$. Таким образом, $I_1<0$ и $I_2<u(x_0)$. Учитывая это, и заменяя в (11) $u(x)$ на $u(x_0)$, получим бессмысленное неравенство $u(x_0)<I_2<u(x_0)$. Следовательно, функция $u(x)$ может достигнуть своего положительного наибольшего значения лишь на границе $\Gamma$.

Аналогичным образом можно доказать, что функция $u(x)$ достигает своего отрицательного наименьшего значения также на границе $\Gamma$.

**Следствие.** *Если функция $u(x)\in C^2\left(\Omega\right)\bigcap C^1\left(\overline{\Omega}\right)\bigcap C_B^1\left(\Omega\bigcup\Gamma_0\right)$ является решением уравнения (1), то $\left|u(x)\right|\le\max\limits_{\xi\in\Gamma}\left|u(\xi)\right|$. В частности, если $u\big|_\Gamma=0$, $u\big|_{x_p=0}=0$, то $u(x)\equiv 0$.*

### 3. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана. Теоремы единственности

**Внутренняя задача Дирихле (Задача $D_i$).** Требуется найти четную по $x_{p-1}$ функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x)\in C^2\left(\Omega\right)\bigcap C^1\left(\overline{\Omega}\right), \tag{12}$$

$$L\left[u(x)\right]=0,\ x\in\Omega, \tag{13}$$

$$\lim_{x_p\to 0}u(x)=0, \tag{14}$$

$$u\big|_\Gamma=\varphi(\xi),\ \xi\in\Gamma,\ \varphi(\xi)\in C\left(\Gamma\right). \tag{15}$$

**Теорема 2.** *Задача $D_i$ не может иметь более одного решения.*

Доказательство следует из принципа максимума.

**Внешняя задача Дирихле (Задача $D_e$).** Требуется найти четную по $x_{p-1}$ функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x)\in C^2\left(\Omega_e\right)\bigcap C^1\left(\overline{\Omega}_e\right), \tag{16}$$

$$L\left[u(x)\right]=0,\ \ x\in\Omega_e, \tag{17}$$

$$u(x)=o(1),\ \text{при}\ \left|x\right|\to\infty \tag{18}$$

$$\lim_{x_p\to 0}u(x)=0, \tag{19}$$

$$u\big|_\Gamma=\varphi(\xi),\ \xi\in\Gamma,\ \varphi(\xi)\in C\left(\Gamma\right). \tag{20}$$

**Теорема 3.** *Задача $D_e$ не может иметь более одного решения.*

Доказательство также следует из принципа максимума.

**Внутренняя задача Неймана (Задача $N_i$).** Требуется найти четную по $x_{p-1}$ функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x)\in C^2\left(\Omega\right)\bigcap C^1\left(\overline{\Omega}\right), \tag{21}$$

$$L\left[u(x)\right]=0,\ \ x\in\Omega, \tag{22}$$

$$u(x)=o(1),\ \text{при}\ \left|x\right|\to\infty \tag{23}$$

$$A\left[u\right]\big|_\Gamma=\psi(\xi),\ \xi\in\Gamma,\ \psi(\xi)\in C\left(\Gamma\right). \tag{24}$$

**Теорема 4.** *Задача* $N_i$ *не может иметь более одного решения.*

Доказательство проводится с помощью первой формулы Грина.

**Внешняя задача Неймана (Задача $N_e$).** Требуется найти четную по $x_{p-1}$ функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x)\in C^2\left(\Omega_e\right)\bigcap C^1\left(\overline{\Omega}_e\right), \tag{25}$$

$$L\left[u(x)\right]=0,\quad x\in\Omega_e, \tag{26}$$

$$\lim_{x_p\to 0}\frac{\partial u}{\partial x_p}=0, \tag{27}$$

$$u(x)=o(1),\ \text{при}\ |x|\to\infty \tag{28}$$

$$A\left[u\right]\big|_\Gamma=\psi(\xi),\ \xi\in\Gamma,\ \psi(\xi)\in C\left(\Gamma\right). \tag{29}$$

**Теорема 5.** *Задача* $N_e$ *не может иметь более одного решения.*

**Доказательство.** Предположим, что задача $N_e$ имеет два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Рассмотрим функцию $w(x)=u_1(x)-u_2(x)$, которая является четной по $x_{p-1}$, удовлетворяет условиям (25)-(28) и граничному условию $A\left[w\right]\big|_\Gamma=0$.

Полагая в первой формуле Грина (8) $u=v=w$, для области $\Omega_{eR}$ получим

$$\int\limits_{\Omega_{eR}} x_{p-1}^k x_p^m\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2 dx=\int\limits_{S_R^+} wA[w]\xi_{p-1}^k dS_R^+ .$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_{eR}} x_{p-1}^k x_p^m\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2 dx=0,$$

откуда $\dfrac{\partial w}{\partial x_j}=0$, $i=\overline{1,p}$. Таким образом, $w(x)=u_1(x)-u_2(x)=const$. Учитывая, что на бесконечности $w(x)\to 0$, получаем $u_1(x)\equiv u_2(x)$.

## 4. Потенциалы типа простого и двойного слоев

С помощью фундаментального решения $\mathscr{E}(\xi,x)$ образуем потенциал типа двойного слоя

$$W(x)=\int\limits_\Gamma v(\xi)A\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma .$$

Потенциал $W(x)$ является регулярным решением уравнения (1) в любой области из $E_p^{++}$, не имеющей общих точек ни с гиперповерхностью $\Gamma$, ни с гиперплоскостями $x_{p-1}=0$ и $x_p=0$. В силу (4) $W(x)=o(1)$ при $x_p\to 0$.

**Лемма 1.** *Если* $\Gamma$ *– поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1}=0$ *и* $x_p=0$ *прямые углы, то*

$$\int\limits_\Gamma\left|A\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]\right|\xi_{p-1}^k d\Gamma\le C,$$

*где* $C$ *– постоянная.*

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству, приведенному в [2].

**Лемма 2. (Геллерстедт).** *Если* $\Gamma$ *– поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1}=0$ *и* $x_p=0$ *прямые углы, то*

$$\int\limits_\Gamma A\left[\varepsilon(\xi,x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma=\begin{cases} I(x)-1, & x\in\Omega;\\ I(x)-\dfrac{1}{2}, & x\in\Gamma;\\ I(x), & x\in\Omega_e,\end{cases}$$

*где* $I(x)=-\displaystyle\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\varepsilon(\xi',x)}{\partial\xi_p}\xi_{p-1}^k d\xi'$.

**Доказательство.** Рассмотрим 3 случая.

Положим сначала, что точка лежит вне области $\Omega$, т.е. $x\in\Omega_e$. Тогда $\mathscr{E}(\xi,x)$ есть регулярное решение уравнения (1) внутри области $\Omega$ с непрерывными конормальными производными всех порядков вплоть до границы $\Gamma$. Положим в (8) $v=1$, $u=\mathscr{E}(\xi,x)$, тогда

$$\int\limits_\Gamma A[\mathscr{E}(\xi,x)]\xi_{p-1}^k d\Gamma=-\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\mathscr{E}(\xi',x)}{\partial\xi_p}\xi_{p-1}^k d\xi'=I(x).$$

Пусть теперь $x\in\Omega$. Полагая в интегральном представлении $u=1$, получим

$$\int\limits_\Gamma A[\mathscr{E}(\xi,x)]\xi_{p-1}^k d\Gamma=\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\mathscr{E}(\xi';x)}{\partial\xi_p}\xi_{p-1}^k d\xi-1=I(x)-1.$$

Рассмотрим случай, когда $x\in\Gamma$. Опишем около точки $x$ шар $Q_{x\varepsilon}$ радиуса $\varepsilon$. Обозначим $S_{x\varepsilon}^+=S_{x\varepsilon}\bigcap\Omega$, $S_{x\varepsilon}^-=S_{x\varepsilon}\setminus S_{x\varepsilon}^+$, $\Gamma_\varepsilon=\Gamma\setminus Q_{x\varepsilon}$. Тогда в силу двух предыдущих случаев имеем

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon\cup S_{x\varepsilon}^-} A[\mathscr{E}(\xi,x)]\xi_{p-1}^k d\Gamma=\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} A[\mathscr{E}(\xi,x)]\xi_{p-1}^k d\Gamma+ +\int\limits_{S_{x\varepsilon}^-} A[\mathscr{E}(\xi,x)]\xi_{p-1}^k dS_{x\varepsilon}=I(x)-1,$$

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon\cup S_{x\varepsilon}^+} A[\mathscr{E}(\xi,x)]\xi_{p-1}^k d\Gamma=\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} A[\mathscr{E}(\xi,x)]\xi_{p-1}^k d\Gamma+ +\int\limits_{S_{x\varepsilon}^+} A[\mathscr{E}(\xi,x)]\xi_{p-1}^k dS_{x\varepsilon}=I(x).$$

Складывая полученные равенства, и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, будем иметь

$$2\int\limits_\Gamma A[\mathscr{E}(\xi,x)]\xi_{p-1}^k d\Gamma=2I(x)-1,$$

откуда

$$\int_\Gamma A[\mathscr{E}(\xi,x)]\xi_{p-1}^k d\Gamma = I(x) - \frac{1}{2}.$$

Лемма 2 доказана.

**Теорема 6.** *Пусть* $\Gamma$ *- поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1}=0$ *и* $x_p=0$ *прямые углы. Тогда при* $\nu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения*

$$W_i(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)},\; W_e(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \widetilde{W(x_0)},$$

*где* $W_i(x_0)$ *и* $W_e(x_0)$ *означают предельные значения потенциала* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$ *при* $x \to x_0$ *соответственно изнутри и извне границы* $\Gamma$, *а* $\widetilde{W(x_0)}$ *– прямое значение потенциала* $W(x)$ *в точке* $x_0 \in \Gamma$, $x_0 \in \Gamma$ *– фиксированная точка границы* $\Gamma$, $\nu_0 = \nu(x_0)$.

Доказательство следует из лемм 1 и 2.

С помощью фундаментального решения $\mathscr{E}(\xi,x)$ уравнения (1) образуем поверхностный потенциал типа простого слоя

$$V(x) = \int_\Gamma \mu(\xi)\mathscr{E}(\xi,x)\xi_{p-1}^k d\Gamma,$$

где $\mu(x)$ – непрерывная функция на $\Gamma$.

Очевидно, что потенциал $V(x)$ – регулярное решение уравнения (1) в любой области, лежащей в $E_p^{++}$, не имеющей общих точек ни с гиперповерхностью $\Gamma$, ни с гиперплоскостями $x_{p-1}=0$ и $x_p=0$.

Из формул (3) и (6) следует, что потенциал $V(x)$ обладает следующими свойствами

$$V(x) = o(1), \text{ при } x_p \to 0,$$

$$V(x) = O\left(\left(\rho_{xx_0}^2\right)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}\right) \text{ при } |x| \to \infty.$$

Фундаментальное решение уравнения (1) имеет такую же особенность, что и уравнение Лапласа, поэтому потенциал $V(x)$ на границе $\Gamma$ ведет себя также, как и гармонический потенциал простого слоя, т.е. имеют место следующие теоремы.

**Теорема 7.** *Пусть* $\Gamma$ *– поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1}=0$ *и* $x_p=0$ *прямые углы. Тогда, если* $\mu \in C(\Gamma)$, *то потенциал типа простого слоя* $V(x)$ *непрерывен в* $E_p^{++}$.

**Теорема 8.** *Пусть* $\Gamma$ *– поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями* $x_{p-1}=0$ *и* $x_p=0$ *прямые углы. Тогда при* $\mu \in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{x\to x_0} A_{x_0}\left[V(x)\right] = A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_i = \frac{\mu_0}{2} + \widetilde{A_{x_0}\left[V(x_0)\right]},$$

$$\lim_{x\to x_0} A_{x_0}\left[V(x)\right] = A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_e = -\frac{\mu_0}{2} + \widetilde{A_{x_0}\left[V(x_0)\right]},$$

*где* $A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_i$ *и* $A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_e$ *– предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя в точке* $x_0 \in \Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* $\Gamma$, $\mu_0 = \mu(x_0)$, *а* $\widetilde{A_{x_0}\left[V(x_0)\right]}$ *– прямое значение конормальной производной потенциала простого слоя.*

## 5. Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям

Решение задачи $D_i$ будем искать в виде потенциала типа двойного слоя

$$u(x) = W(x) = \int_\Gamma \nu(\xi)A\left[\varepsilon(\xi,x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma.$$

Очевидно, что функция $u(x)$ удовлетворяет условиям (12)-(14) внутренней задачи Дирихле. После подстановки $u(x)$ в граничное условие (15) с учетом формулы предельного значения потенциала типа двойного слоя задача $D_i$ сводится к следующему интегральному уравнению

$$\nu(x) - 2\int_\Gamma \nu(\xi)A\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma = -2\varphi(x). \tag{30}$$

Интегральное уравнение (30) соответствует внутренней задаче Дирихле.

Таким же образом задачи $D_e$, $N_i$ и $N_e$ сводятся, соответственно, к следующим уравнениям

$$\nu(x) + 2\int_\Gamma \nu(\xi)A\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma = 2\varphi(x), \tag{31}$$

$$\mu(x) + 2\int_\Gamma \mu(\xi)A_x\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma = 2\psi(x), \tag{32}$$

$$\mu(x) - 2\int_\Gamma \mu(\xi)A_x\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma = -2\psi(x). \tag{33}$$

Отметим следующие свойства интегральных уравнений (30), (31), (32), (33).

1. Данные уравнения являются уравнениями со слабой особенностью.

2. Ядра $A\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]$ и $A_x\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]$ получаются друг из друга перестановкой местами точек $\xi$ и $x$. Так как эти ядра вещественные, то они сопряженные, а значит уравнения (30) и (33), (31) и (32) – попарно сопряженные интегральные уравнения.

## 6. Сведение краевых задач типа Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям теории потенциала

Рассмотрим однородное интегральное уравнение, соответствующее задаче $N_e$

$$\mu(x)-2\int_\Gamma \mu(\xi)A_x\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma=0. \tag{34}$$

Если $\overline{\mu(\xi)}$ – ненулевое решение этого уравнения, то функция $\overline{u(x)}=\int_\Gamma \overline{\mu(\xi)}\mathscr{E}(\xi,x)\xi_{p-1}^k d\Gamma$ удовлетворяет условиям (25)-(28) внешней задачи Неймана и граничному условию $A_x\left[\overline{u(x)}\right]\Big|_\Gamma=0$, т.е.

$$A_x\left[\overline{u(x)}\right]\Big|_e=-\frac{\overline{\mu(x)}}{2}+ +\int_\Gamma \overline{\mu(\xi)}A_x\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma\equiv 0. \tag{35}$$

По теореме единственности для задачи $N_e$ $\overline{u(x)}=0$, $x\in\Omega_e$. Так как потенциал простого слоя есть непрерывная функция в $E_p^{++}$, то $\overline{u(x)}=0$, $x\in\Gamma$.

В области $\Omega$ функция $\overline{u(x)}$ удовлетворяет уравнению (1) и обращается в нуль на границе $\Gamma$. По теореме единственности для задачи $D_i$ $\overline{u(x)}=0$, $x\in\Omega$. Следовательно,

$$A_x\left[\overline{u(x)}\right]\Big|_i=\frac{\overline{\mu(x)}}{2}+ +\int_\Gamma \overline{\mu(\xi)}A_x\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma\equiv 0. \tag{36}$$

Вычитая из равенства (36) равенство (35), получим $\overline{\mu(\xi)}=0$, $x\in\Omega$. Т.е. однородное интегральное уравнение (34) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма, интегральное уравнение (33) задачи $N_e$ однозначно разрешимо для любой непрерывной на $\Gamma$ функции $\psi(x)$.

Таким образом, значение параметра $\lambda=2$ – правильное для ядра $A_x\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]$, по известной теореме Фредгольма, оно является правильным и для сопряженного ядра $A\left[\mathscr{E}(\xi,x)\right]$.

Отсюда следует, что интегральное уравнение (30) задачи $D_i$ однозначно разрешимо для любой непрерывной функции $\varphi(x)\in C(\Gamma)$.

Из разрешимости интегральных уравнений задач $D_i$ и $N_e$ следует, что разрешимы и сами задачи. Это приводит к следующим теоремам.

**Теорема 9.** *Если $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями $x_{p-1}=0$ и $x_{p-1}=0$ прямые углы, то задача $D_i$ для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала типа двойного слом.*

**Теорема 10**. *Если $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями $x_{p-1}=0$ и $x_{p-1}=0$ прямые углы, то задача $N_e$ для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.*

Аналогичным образом доказывается, что интегральные уравнения (31) и (32), соответствующие задачам $D_e$ и $N_i$ разрешимы единственным образом при любых функциях $\varphi(x),\psi(x)\in C(\Gamma)$. Из разрешимости интегральных уравнений задач $D_e$ и $N_i$ следует, что разрешимы и сами задачи. Это приводит к следующим теоремам.

**Теорема 11.** *Если $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями $x_{p-1}=0$ и $x_p=0$ прямые углы, то задача $D_e$ для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала типа двойного слоя.*

**Теорема 12**. *Если $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями $x_{p-1}=0$ и $x_p=0$ прямые углы, то задача $N_i$ для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.*

* * * * * * * * * *


1. Чеботарева Э.В. Интегральное представление решения одного вырождающегося В-эллиптического уравнения первого рода. // Труды 2-го Международного форума молодых ученых "Актуальные проблемы современной науки". Самара, 2006. С. 107-111.
2. Нигмедзянова А.М. Решение основных краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений методом потенциалов: Дисс. … канд. физ.-мат. наук. Казань, 2007. С.71-75.

# THE SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS FOR MULTIDIMENSIONAL CONFLUENT B-ELLIPTICAL EQUATION OF THE FIRST KIND

**E.V.Tchebotaryova**

Fundamental solution and potential of simple fiber and double layer types of one confluent B-elliptical equation of first kind are built in the given research work. With the aid of mentioned potentials boundary problems are reduced to Fredholm integral equations of the second kind and the uniqueness of solution is proved in the given work.