Л.Г.Салехов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ СВЕРТОК С λ-ОПЕРАТОРАМИ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Рассматривается класс уравнений сверток с λ-операторами Римана-Лиувилля $(\lambda \in \mathbb{C})$ в одном сверточном модуле обобщенных функций на действительной оси. Решения строятся в явном виде путем построения элементарных (фундаментальных) решений с помощью проекционного метода. Рассматриваемый класс уравнений содержит как обыкновенные дифференциальные и интегральные уравнения в указанном сверточном модуле и в $\mathfrak{D}_+'$, так и дифференциальные и сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с λ-операторами дробного дифференцирования и интегрирования. Этот класс уравнений тесно связан с задачей Римана, когда граничное условие, понимаемое в смысле обобщенных функций, содержит сверточные λ-операторы Римана-Лиувилля.

Пусть $\mathcal{O}_{-1}$ – векторное подпространство функций из $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ таких, что $\left|t\varphi^{(k)}(t)\right| \le C$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Топология в $\mathcal{O}_{-1}$ определяется также как в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, причем $\forall k \in \mathbb{N}$ существует постоянная C_k, не зависящая от j так, что $\left|\varphi_j^{(k)}\right| \le C_k |t|^{-1}$, где (φ_j), $j \in \mathbb{N}$ последовательность из $\mathcal{O}_{-1}$.

Через $\mathcal{O}'_{-1}$ обозначают [1] пространство, дуальное к пространству $\mathcal{O}_{-1}$. Пусть A – векторное подпространство обобщенных функций из $\mathcal{O}'_{-1}$, имеющих на бесконечности асимптотику $O\left(|t|^{-1}\right)$, то есть, если $S \in A$, то существуют константы $R > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$\left|< S,\varphi >\right| \le C\int_{|t|>R} |t|^{-1} |\varphi(t)|\,dt, \quad \forall\varphi \in \mathcal{O}_{-1}, \quad \operatorname{Supp}\varphi \in \left\{|t| > R\right\}.$$

Тогда для $\forall S$ и $\forall T \in A$ определим свертку $S * T$ по формуле:

$$< S * T,\varphi >:=< S,\breve{T} * \varphi >=< T,\breve{S} * \varphi >, \quad \forall\varphi \in \mathcal{O}_{-1},$$

где $\breve{S},\breve{T}$ действуют по правилу: $<\breve{S},\varphi >:=< S,\breve{\varphi} >$, $\forall\varphi \in \mathcal{O}_{-1}$, а $\breve{\varphi}(t) := -\varphi(-t)$.

Легко убедиться, что A с введенной операцией свертка становится ассоциативной и коммутативной сверточной алгеброй с единицей δ-мерой Дирака, а пространство $\mathcal{O}'_{-1}$ – сверточным модулем на A, ибо $\forall S \in A$, $\forall T \in \mathcal{O}'_{-1}$ свертка $S * T$, определенная по закону

$$< S * T,\varphi >:=< T,\breve{S} * \varphi >, \quad \forall\varphi \in \mathcal{O}_{-1},$$

существует, причем $(S * T) \in \mathcal{O}'_{-1}$.

Иначе говоря, A – есть алгебра сверточных операторов на $\mathcal{O}'_{-1}$.

В сверточном модуле $\mathcal{O}'_{-1}$ рассматривается следующий класс уравнений сверток:

$$\left\{\sum_{k=0}^{m} a_{m-k} f_\lambda^{(\alpha-k)}(t) * \delta_+ + \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} f_\mu^{(\beta-k)}(t) * \delta_-\right\} * \Phi = W, \tag{1}$$

где $a_k, b_k - const$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\lambda > 0,\ \mathrm{Re}\mu > 0$; W – заданная обобщенная функция из $\mathcal{O}'_{-1}$, а Φ – искомая обобщенная функция из $\mathcal{O}'_{-1}$; $\left\{ f_\lambda^{(\gamma)}(t) * \right\}$ – сверточные λ-операторы Римана-Лиувилля [2] следующего вида

$$f_\lambda^{(\gamma)}(t) = \begin{cases} \dfrac{Y(t)t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-\lambda t},\ \gamma > 0,\ \lambda \in \mathbb{C} \,|\ \ \mathrm{Re}\lambda > 0; \\ (D+\lambda)^m f_\lambda^{(\gamma+m)}(t),\ \gamma \le 0,\ m - \min \mathbb{N} \,|\, (\gamma+m) > 0, \end{cases}$$

где $Y(t)$ – функция Хевисайда, $\Gamma(t)$ – гамма-функция; $D \equiv \dfrac{d}{dt}$ – производная в смысле обобщенных функций; $\delta_+ := \dfrac{1}{2}\delta - \dfrac{1}{2\pi i} v.p.\dfrac{1}{t}$ и $\delta_- := \delta - \delta_+$ − обобщенные функции по Н.Н. Боголюбову.

Так как операторы $(\delta_\pm *)$ являются дополнительными проекторами, то уравнение (1) есть уравнение с парным оператором сверток в сверточном модуле $\mathcal{O}'_{-1}$ [3].

Учитывая, что $f_\lambda^{(\gamma)}(t)$, $\delta_\pm \in A$ и $\delta_+ * \Phi = \hat{\Phi}^+$, $\delta_- * \Phi = -\hat{\Phi}^-$ в смысле обобщенных функций [4], где $\hat{\Phi}(z)$ − представление Коши (или преобразование Гильберта) для Φ, т.е.

$$\hat{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} < \Phi, \frac{1}{t-z} >,\ \ \mathrm{Im}\, z \ne 0\,, \tag{2}$$

уравнение (1) можно записать в виде:

$$P_m(t) * \hat{\Phi}^+ - Q_n(t) * \hat{\Phi}^- = W\,, \tag{3}$$

где

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} f_\lambda^{(\alpha-k)}(t);\ \ Q_n(t) \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} f_\mu^{(\beta-k)}(t)\,.$$

Соотношение (3) есть граничное условие в смысле обобщенных функций для искомой кусочно голоморфной функции $\hat{\Phi}(z)$, исчезающей на бесконечности, причем известно, что если $\Phi \in \mathcal{O}'^{(k)}_{-1}$, $k \in \mathbb{N}$, то $\hat{\Phi}(z)$ имеет следующее поведение в окрестности оси $\mathbb{R}$ [5]:

$$\left| \hat{\Phi}^\pm(z) \right| \le \frac{c}{\left|\mathrm{Im}\, z\right|^{k+1}}\,.$$

Если Φ есть решение уравнения (1), то формула (2) дает решение задачи (3), и обратно, если $\hat{\Phi}(z)$ есть решение задачи (3), исчезающее на бесконечности, то формула $\Phi = \breve{\Phi}^+ - \breve{\Phi}^-$, понимаемая в смысле обобщенных функций, дает решение уравнения (1) .

Рассмотрим проекционный метод решения уравнения (1). Пусть E − элементарное решение уравнения (1). Тогда по определению E имеем:

$$\left\{P_m(t)*\delta_+ + Q_n(t)*\delta_-\right\}*E=\delta. \qquad (4)$$

Умножая (сверточное) уравнение (4) сначала на δ_+, затем на δ_-, получим:

$$P_m(t)*\left(\delta_+ * E\right)=\delta_+, \qquad (5)$$

$$Q_n(t)*\left(\delta_- * E\right)=\delta_-. \qquad (6)$$

Далее, поскольку множества $\left\{f_\lambda^{(\alpha)}(t), \forall\alpha\in\mathbb{R}\right\}$, $\left\{f_\mu^{(\beta)}(t), \forall\beta\in\mathbb{R}\right\}$ являются сверточными группами, то умножая (сверточно) (5) и (6) соответственно на $f_\lambda^{(-\alpha)}(t)$, $f_\mu^{(-\beta)}(t)$, получим соотношения:

$$\sum_{k=0}^{m} a_{m-k} f_\lambda^{(-k)}(t)*\left(\delta_+ * E\right)=f_\lambda^{(-\alpha)}(t)*\delta_+, \qquad (7)$$

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n-k} f_\mu^{(-k)}(t)*\left(\delta_- * E\right)=f_\mu^{(-\beta)}(t)*\delta_-. \qquad (8)$$

Теперь, учитывая, что $f_\nu^{(-k)}(t)=(D+\nu)^k\delta,\ \ \forall k\in\mathbb{N}$, $\nu=\lambda,\mu$, очевидно, что соотношения (7) и (8) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\sum_{k=0}^{m} a_{m-k}(D+\lambda)^k(\delta_+ * E)= f_\lambda^{(-\alpha)}(t)*\delta_+, \qquad (9)$$

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}(D+\mu)^k(\delta_- * E)= f_\mu^{(-\beta)}(t)*\delta_-, \qquad (10)$$

соответственно в сверточных алгебрах A_+ и A_-, где $A=A_+ + A_-$ – прямая сумма $A_\pm=\delta_\pm * A$.

Из теории уравнений сверток известно, что всегда существуют элементарные решения $E_\pm$ соответственно уравнений (9) и (10), принадлежащие сверточной алгебре $\mathfrak{D}_+'$ [6], но, вообще говоря, не принадлежащие $A_\pm$. Однако, иногда удается из элементарных решений $E_\pm$, используя решения соответствующих однородных уравнений к уравнениям (9), (10), построить элементарные решения $\varepsilon_\pm$, принадлежащие $A_\pm$.

Таким образом, если существуют элементарные решения $\varepsilon_\pm\in A_\pm$, то существуют и, притом единственные, решения уравнений (9) и (10), принадлежащие $A_\pm$, которые имеют вид:

$$\delta_+ * E=\varepsilon_+ * f_\lambda^{(-\alpha)}(t)*\delta_+, \qquad \delta_- * E=\varepsilon_- * f_\mu^{(-\beta)}(t)*\delta_-,$$

откуда

$$E=\varepsilon_+ * f_\lambda^{(-\alpha)}(t)*\delta_+ + \varepsilon_- * f_\mu^{(-\beta)}(t)*\delta_-. \qquad (11)$$

Поскольку $E\in A$, то существует и, притом единственное, решение уравнения (1) в $\mathcal{O}_{-1}'$, которое имеет конструкцию $\Phi=E*W$, где E имеет вид (11). Тогда формула (2) дает решение задачи (3).

Приведем несколько примеров.

1. Если в уравнении (1) положить $m = n = 0$, $a_k = b_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = b_0 = \Gamma(\gamma)$, где $0 < \gamma < 1$, $\alpha = \beta = \gamma + p$, $p \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda = \mu \in \mathbb{C}$, то оно примет вид $\Gamma(\gamma) f_\lambda^{(\gamma+p)}(t) * \Phi = W$. Рассматривая его в $\mathfrak{D}_+'$, получим следующее его решение $\Phi = (D+\lambda)^{p+1} \left\{ \dfrac{\pi}{\sin\gamma} Y(y) t^{-\gamma} e^{-\gamma t} * W \right\}$. Из него при $p = 0$ можно получить решение уравнения сверток, обобщающее известное уравнение Абеля при $\lambda = 0$.

2. Уравнение в $\mathcal{O}'_{-1}$ вида

$$\left\{ (D^2 - \omega^2) f_\lambda^{(\alpha-n)}(t) * \delta_+ + a(D+\nu)^m f_\mu^{(\beta+k)}(t) * \delta_- \right\} * \Phi = W,$$

где $a \neq 0$, $\omega > 0$, $\nu > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re}\lambda > 0, \operatorname{Re}\mu > 0$ имеет единственное решение

$$\Phi = \left\{ -\frac{1}{2\omega} e^{-\omega|t|} * f_\lambda^{(n-\alpha)}(t) * \delta_+ + \frac{Y(t)}{(m-1)!} e^{-\gamma t} t^{m-1} * f_\mu^{-(\beta+k)}(t) * \frac{1}{a}\delta_- \right\} * W.$$

Литература

[1] Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., 1968. С.81.

[2] Салехов Л.Г., Салехова Л.Л. О некоторых классах уравнений в сверточной алгебре $\mathfrak{D}_+'$. // Известия вузов. Математика. 2004. №7(506). С.75-77.

[3] Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М., 1979. С.70.

[4] Салехов Л.Г., Салехова Л.Л. К решению одного класса уравнений сверток в сверточном модуле. // Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы. Стерлитамак. 2003. С.199-206.

[5] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.I. Теория распределения и анализ Фурье. М., 1986. С.86.

[6] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1967. С.159.