А.М.Нигмедзянова

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Строятся потенциалы типа простого и двойного слоев для одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка и изучаются их свойства. С помощью этих потенциалов краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма и доказывается их однозначная разрешимость.

Пусть E_p^+ – полупространство $x_p > 0$ p-мерного евклидова пространства точек $x = (x', x_p)$, $x' = (x_1, x_2, ..., x_{p-1})$, D-конечная область в E_p^+, ограниченная открытой частью Γ_0 гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью Γ .

В E_p^+ рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$L[U] = x_p^m \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} = 0 \qquad (1)$$

при $m > 0, m \in \mathbb{Z}$ и $p \geq 3$.

В этой работе строятся решения основных краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения (1) методом потенциалов. В первом разделе даются постановки основных краевых задач для уравнения (1) и доказывается единственность их решения. Во втором разделе строятся потенциалы типа простого и двойного слоев и изучаются их свойства. В третьем разделе основные краевые задачи для уравнения (1) сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода и доказывается их однозначная разрешимость.

1. Постановка краевых задач типа Дирихле и Неймана. Теоремы единственности

Через $C_1(\Gamma)$ обозначим множество функций $\varphi(\xi)$ класса $C(\Gamma)$, удовлетворяющих условию $\varphi(\xi) = O(\xi_p)$ при $\xi_p \to 0$.

Внутренняя краевая задача типа Дирихле (Задача D_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям

$$U(x) \in C^2(D) \cap C(\overline{D}), \qquad (2)$$

$$L[U(x)] = 0, x \in D, \qquad (3)$$

$$U(x) = O(x_p) \text{ при } x_p \to 0, \qquad (4)$$

$$U|_\Gamma = f(x), \ f(x) \in C_1(\Gamma), \qquad (5)$$

Теорема 1. Внутренняя краевая задача типа Дирихле (2) – (5) не может иметь более одного решения.

Внешняя краевая задача типа Дирихле (Задача D_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям

$$U(x)\in C^2(D_e)\cap C(\overline{D}_e),\ D_e=E_p^+\setminus D, \tag{6}$$

$$L[U(x)]=0,\ x\in D_e, \tag{7}$$

$$U(x)=O(x_p)\ \text{при}\ x_p\to 0, \tag{8}$$

$$U(x)=O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}\right)\ \text{при}\ r=\sqrt{x_1^2+\ldots x_p^2}\to\infty, \tag{9}$$

$$U|_\Gamma=f(x),\ f(x)\in C_1(\Gamma), \tag{10}$$

Теорема 2. Внешняя краевая задача типа Дирихле (6) – (10) не может иметь более одного решения.

Внутренняя краевая задача типа Немана (Задача N_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям

$$U(x)\in C^2(D)\cap C(\overline{D}), \tag{11}$$

$$L[U(x)]=0,\ x\in D, \tag{12}$$

$$U(x)=O(x_p)\ \text{при}\ x_p\to 0, \tag{13}$$

$$A[U(x)]|_\Gamma=\varphi(x),\ \varphi(x)\in C_1(\Gamma), \tag{14}$$

Здесь $A[U]=x_p^m\sum_{j=1}^{p-1}\cos(n,x_j)\frac{\partial U}{\partial x_j}+\cos(n,x_p)\frac{\partial U}{\partial x_p}$ – конормальная производная, n – внешняя нормаль к Γ.

Теорема 3. Внутренняя краевая задача типа Неймана (11) – (14) не может иметь более одного решения.

Внешняя краевая задача типа Неймана (Задача N_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям

$$U(x)\in C^2(D_e)\cap C(\overline{D}_e), \tag{15}$$

$$L[U(x)]=0,\ x\in D_e, \tag{16}$$

$$U(x)=O(x_p)\ \text{при}\ x_p\to 0, \tag{17}$$

$$U(x)=O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}\right)\ \text{при}\ r=\sqrt{x_1^2+\ldots x_p^2}\to\infty \tag{18}$$

$$A[U(x)]|_\Gamma=\varphi(x),\ \varphi(x)\in C_1(\Gamma), \tag{19}$$

Здесь A - конормаль, направленная во вне области $\overline{D}$.

Теорема 4. Внешняя краевая задача типа Неймана (15) – (19) не может иметь более одного решения.

2. Потенциалы типа простого и двойного слоев для уравнения (1) и их свойства

Известно [1], что фундаментальное решение уравнения (1) имеет вид

$$E(x,x_0)=a(\rho_1^2)^{-\beta}(\rho^2)^{-\frac{p-2}{2}}(1-\sigma)^{1-2\beta}\times$$

$$\times\left[\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\beta\right)}F\left(1-\beta,2-\frac{p}{2}-\beta,2-\frac{p}{2};\sigma\right)+,\right. \tag{20}$$

$$\left.+\sigma^{\frac{p-2}{2}}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(-\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}-\beta\right)}F\left(1-\beta,\frac{p}{2}-\beta,\frac{p}{2};\sigma\right)\right]$$

где $\sigma=\dfrac{\rho^2}{\rho_1^2}$, $\left.\begin{matrix}\rho^2\\ \rho_1^2\end{matrix}\right\}=\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j-x_{j_0})^2+\dfrac{4}{(2+m)^2}\left(x_p^{\frac{2+m}{2}}\mp x_{p_0}^{\frac{2+m}{2}}\right)^2$, $\beta=\dfrac{m}{2(m+2)}$,

$$a=\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\beta\right)}{4\pi^{\frac{p}{2}}\Gamma(2-2\beta)}\left(\frac{4}{2+m}\right)^{2\beta}.$$

С помощью фундаментального решения $E(x,x_0)$ уравнения (1) образуем поверхностные потенциалы типа простого и двойного слоев:

$$V(x)=\int_\Gamma \mu(\xi)E(\xi,x)d\Gamma, \tag{21}$$

$$W(x)=\int_\Gamma \nu(\xi)A\left[E(\xi,x)\right]d\Gamma, \tag{22}$$

где $A[U]=\xi_p^m\sum\limits_{j=1}^{p-1}\cos(n,\xi_j)\dfrac{\partial U}{\partial\xi_j}+\cos(n,\xi_p)\dfrac{\partial U}{\partial\xi_p}$.

Предполагается, что плотности $\mu(\xi),\nu(\xi)\in C_1(\Gamma)$.

Очевидно, что потенциалы $V(x)$ и $W(x)$ – регулярные решения уравнения (1) в любой области, лежащей в E_p^+, не имеющей общих точек ни с гиперповерхностью Γ, ни с гиперплоскостью $x_p=0$.

Из [1] следует, что потенциалы $V(x)$ и $W(x)$ обладают следующими свойствами:

$$V(x)=O(x_p),\ W(x)=O(x_p) \text{ при } x_p\to 0,$$

$$V(x)=O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}\right),\ W(x)=O\left((\rho_0^2)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}\right) \text{ при}$$

$$r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2}\to\infty.$$

Из (20) следует, что фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точке x_0 имеет степенную особенность вида ρ^{2-p}, т.е. такую же особенность, что фундаментальное решение уравнения Лапласа. Поэтому потенциалы (21) и (22) на границе Γ ведут себя так же, как и гармонические потенциалы [[2], стр. 262], т.е. имеют место следующие теоремы:

Теорема 6. Пусть Γ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол. Тогда при $\nu \in C_1(\Gamma)$ имеют место следующие предельные соотношения

$$W_i(x_0) = -\frac{\nu_0}{2} + \tilde{W}(x_0), \; W_e(x_0) = \frac{\nu_0}{2} + \tilde{W}(x_0),$$

где $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ означают предельные значения потенциала $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$ при $x \to x_0$ соответственно изнутри и извне границы Γ, а $\tilde{W}(x_0)$ – прямое значение потенциала $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$. Здесь точка $x_0 \in \Gamma$ – фиксированная точка границы Γ, $\nu_0 = \nu(x_0)$.

Теорема 7. Пусть Γ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол. Тогда при $\mu \in C_1(\Gamma)$ потенциал типа простого слоя $V(x)$ непрерывен в E_p^+.

Теорема 8. Пусть Γ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол. Тогда при $\mu \in C_1(\Gamma)$ имеют место следующие предельные соотношения

$$A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_i = \frac{\mu_0}{2} + A_{x_0}\left[\tilde{V}(x_0)\right], \; A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_e = -\frac{\mu_0}{2} + A_{x_0}\left[\tilde{V}(x_0)\right],$$

где $A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_i$ и $A_{x_0}\left[V(x_0)\right]_e$ означают предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя в точке $x_0 \in \Gamma$ соответственно изнутри и извне границы Γ, а $A_{x_0}\left[\tilde{V}(x_0)\right]$ – прямое значение конормальной производной типа простого слоя $V(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$. Здесь точка $x_0 \in \Gamma$ – фиксированная точка границы Γ, $\mu_0 = \mu(x_0)$.

3. Сведение задач типа Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям теории потенциала

Задача D_i. Решение задачи D_i будем искать в виде потенциала типа двойного слоя

$$U(x) = \int_\Gamma \nu(\xi) A\left[E(\xi, x)\right] d\Gamma. \tag{23}$$

Очевидно, что функция $U(x)$ удовлетворяет условиям (2) – (4) внутренней задачи типа Дирихле. Плотность $\nu(\xi)$ – пока неопределенная функция. Ее найдем из требования, чтобы функция (23) удовлетворяла граничному условию (5) задачи D_i.

С этой целью подставим $U(x)$ в граничное условие (5) и, учитывая формулу предельного значения потенциала типа двойного слоя, получим

$$-\frac{\nu(x)}{2}+\int_{\Gamma}\nu(\xi)A\big[E(\xi,x)\big]d\Gamma=f(x).$$

Таким образом, задача D_i свелась к следующему интегральному уравнению

$$\nu(x)-2\int_{\Gamma}\nu(\xi)A\big[E(\xi,x)\big]d\Gamma=-2f(x). \qquad (24)$$

Аналогично выводятся интегральные уравнения, соответствующие задачам D_e, N_i, N_e. Они имеют вид

$$\nu(x)+2\int_{\Gamma}\nu(\xi)A\big[E(\xi,x)\big]d\Gamma=2f(x), \qquad (25)$$

$$\mu(x)+2\int_{\Gamma}\mu(\xi)A_x\big[E(\xi,x)\big]d\Gamma=2\varphi(x), \qquad (26)$$

$$\mu(x)-2\int_{\Gamma}\mu(\xi)A_x\big[E(\xi,x)\big]d\Gamma=2\varphi(x). \qquad (27)$$

Отметим следующие свойства интегральных уравнений (24) – (27):

1). Эти уравнения являются интегральными уравнениями со слабой особенностью.

2). Ядра $A\big[E(\xi,x)\big]$ и $-A_x\big[E(\xi,x)\big]$ получаются друг из друга перестановкой точек ξ и x. Так как эти ядра вещественные, то они сопряженные. Отсюда следует, что интегральные уравнения (24) и (27), (25) и (26) – попарно сопряженные интегральные уравнения. Следовательно, для них справедливы все теоремы Фредгольма.

1. Исследование первой пары сопряженных уравнений

Докажем, что интегральные уравнения (24) и (27), соответствующие задачам D_i и N_e, разрешимы единственным образом при любых функциях $f(x),\varphi(x)\in C_1(\Gamma)$. С этой целью рассмотрим однородное интегральное уравнение задачи N_e

$$\mu(x)-2\int_{\Gamma}\mu(\xi)A_x\big[E(\xi,x)\big]d\Gamma=0. \qquad (28)$$

Пусть $\overline{\mu}(\xi)$ – ненулевое решение этого уравнения. Тогда функция

$$\overline{U}(x)=\int_{\Gamma}\overline{\mu}(\xi)E(\xi,x)d\Gamma. \qquad (29)$$

удовлетворяет условиям (15) – (18) внешней задачи типа Неймана и граничному условию $A_x[\overline{U}(x)]\big|_{\Gamma}=0$, т.е.

$$A_x\left[\bar{U}(x)\right]_e = -\frac{\bar{\mu}(x)}{2} + \int_\Gamma \bar{\mu}(\xi) A_x\left[E(\xi,x)\right] d\Gamma \equiv 0 . \qquad (30)$$

По теореме единственности внешней задачи N_e $\bar{U}(x) \equiv 0,\ x \in D_e$.

Так как потенциал простого слоя есть непрерывная функция во всем полупространстве, то

$$\bar{U}(x) \equiv 0,\ x \in \Gamma . \qquad (31)$$

Рассмотрим теперь потенциал $\bar{U}(x)$ в области D. В этой области функция $\bar{U}(x)$ удовлетворяет условиям (2) – (4) задачи D_i и в силу (31) обращается в нуль на границе Γ. По теореме единственности задачи D_i $\bar{U}(x) \equiv 0,\ x \in D$. Тогда

$$A_x\left[\bar{U}(x)\right]_i = \frac{\bar{\mu}(x)}{2} + \int_\Gamma \bar{\mu}(\xi) A_x\left[E(\xi,x)\right] d\Gamma \equiv 0 . \qquad (32)$$

Вычитая из равенства (32) равенство (30), получаем $\bar{\mu}(\xi) \equiv 0$, $x \in D$.

Таким образом, однородное интегральное уравнение (28) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма, интегральное уравнение (27) задачи N_e однозначно разрешимо для любой функции $\varphi(x) \in C_1(\Gamma)$. Таким образом, значение параметра $\lambda = 2$ – правильное для ядра $A_x\left[E(\xi,x)\right]$, по известной теореме Фредгольма, оно является правильным и для сопряженного ядра $A\left[E(\xi,x)\right]$. Отсюда следует, что интегральное уравнение (24) задачи D_i однозначно разрешимо для функции $f(x) \in C_1(\Gamma)$.

Из разрешимости интегральных уравнений задач D_i и N_e следует, что разрешимы и сами задачи. Это приводит к следующим теоремам.

Теорема 9. Если Γ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то задача D_i для этой поверхности разрешима при любых граничных данных из $C_1(\Gamma)$, и решение можно представить в виде потенциала типа двойного слоя.

Теорема 10. Если Γ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то задача N_e для этой поверхности разрешима при любых граничных данных из $C_1(\Gamma)$, и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.

2. Исследование второй пары сопряженных уравнений

В силу рассуждений, аналогичных рассуждениям в исследовании первой пары сопряженных уравнений для второй пары сопряженных уравнений имеют место следующие теоремы.

Теорема 11. Если Γ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то задача D_e для этой поверхности разрешима при любых граничных данных из $C_1(\Gamma)$, и решение можно представить в виде потенциала типа двойного слоя.

Теорема 12. Если Γ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то задача N_i для этой поверхности разрешима при любых граничных данных из $C_1(\Gamma)$, и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.

Литература

[1] Нигмедзянова А.М. О фундаментальном решении одного вырождающегося эллиптического уравнения. // Труды Второй Всероссийской науч. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи". Ч.3. Самара, 2005. С.180-182.

[2] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М. 1977.