И.Б.Гарипов, С.М.Гафурова

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ В ЧЕТВЕРТИ КРУГА

Рассматривается одно параболическое уравнение с оператором Бесселя. Краевая задача для данного уравнения решается методом разделения переменных. Решение получено в виде ряда по многочленам Якоби и функциям Бесселя.

Пусть E_2^{++} – первая четверть $x>0$, $y>0$ координатной плоскости Oxy, а R_3^+ – полупространство $t>0$ арифметического пространства R_3 точек (x,y,t); $R_3^{++}=E_2^{++}\times[0,\infty)$.

Обозначим через D четверть круга $x^2+y^2<1$, $x>0$, $y>0$. Пусть граница Γ равна $\sigma\bigcup I_1\bigcup I_2\bigcup O$, где $\sigma: x^2+y^2=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ (четверть окружности), $I_1: y=0$, $0<x<1$, $I_2: x=0$, $0<y<1$, (интервалы на осях Ox и Oy соответственно), $O=O(0,0)$ – начало системы координат, $T^+=\{(x,y,t):(x,y)\in D,\, t>0\}$.

Рассмотрим задачу: найти решение $u=u(x,y,t)$, уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1)$$

при $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, в области T^+ такое, что $u\in C(\overline{T}^+)\bigcap C_{x,t}^{2,1}(T^+)$ удовлетворяет начальному условию

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{D} \qquad (2)$$

и граничным условиям

$$u\big|_{\sigma}=0,\ \ \lim_{x\to 0}x^{\alpha}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{I_2}=0,\ \ \lim_{y\to 0}y^{\beta}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{I_1}=0\,. \qquad (3)$$

Перейдем к полярной системе координат $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Тогда область D преобразуется в прямоугольник $P: 0<r<1, 0<\theta<\pi/2$, а уравнение (1) и начальное условие (2) перепишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1+\alpha+\beta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+(\beta\operatorname{ctg}\theta-\alpha\operatorname{tg}\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta}\right), \qquad (4)$$

$$u\big|_{t=0}=\Phi(r,\theta), \qquad (5)$$

где $\Phi(r,\theta)=\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Краевые условия (3) в переменных r, θ имеют вид

$$u\big|_{r=1}=0,\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, \qquad (6)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\cos^{\alpha}\theta\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0, \qquad (7)$$

$$\lim_{\theta\to 0}\sin^{\beta}\theta\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0\,. \qquad (8)$$

Будем искать нетривиальные решения уравнения (4) в прямоугольнике P методом разделения переменных

$$u(r,\theta,t)=T(t)v(r,\theta)\,, \qquad (9)$$

где $T(t)$, $v(r,\theta)$ – пока неизвестные функции.

Подставляя произведение (9) в уравнение (4), в граничные условия (6) – (8) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{dT}{dt}+\lambda^2T=0\,, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1+\alpha+\beta}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+(\beta\operatorname{ctg}\theta-\alpha\operatorname{tg}\theta)\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\lambda^2 v=0\,, \qquad (11)$$

$$v\big|_{r=1}=0\,, \qquad (12)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\cos^{\alpha}\theta\left(\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)=0\,, \qquad (13)$$

$$\lim_{\theta\to 0}\sin^{\beta}\theta\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)=0\,. \qquad (14)$$

Решение уравнения (11) ищем в виде произведения

$$v(r,\theta)=R(r)\Psi(\theta)\,. \qquad (15)$$

Подставляя произведение (15) в уравнение (11) и разделяя переменные, получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\Psi''(\theta)+(\beta\operatorname{ctg}\theta-\alpha\operatorname{tg}\theta)\Psi'(\theta)+\mu\Psi(\theta)=0\,, \qquad (16)$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}\,;$$

$$r^2R''(r)+(1+\alpha+\beta)rR'(r)+(\lambda^2r^2-\mu)R(r)=0\,, \qquad (17)$$

$$0<r<1\,,$$

где μ – некоторый спектральный параметр.

Граничные условия (12) – (14) с учетом (15) имеют вид

$$R(r)\big|_{r=1}=0\,, \qquad (18)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\cos^{\alpha}\theta\left(\cos\theta R'(r)\Psi(\theta)-\frac{\sin\theta}{r}R(r)\Psi'(\theta)\right)=0\,, \qquad (19)$$

$$\lim_{\theta\to 0}\sin^{\beta}\theta\left(\sin\theta R'(r)\Psi(\theta)+\frac{\cos\theta}{r}R(r)\Psi'(\theta)\right)=0\,. \qquad (20)$$

Условия (19) и (20) должны быть выполнены для любых r из интервала $(0,1)$, поэтому

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\cos^{\alpha+1}\theta\frac{\Psi(\theta)}{\Psi'(\theta)}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\cos^{\alpha}\theta\sin\theta\frac{R(r)}{rR'(r)}=0\,, \tag{21}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\sin^{\beta+1}\theta\frac{\Psi(\theta)}{\Psi'(\theta)}=-\lim_{\theta\to 0}\sin^{\beta}\theta\cos\theta\frac{R(r)}{rR'(r)}=0\,. \tag{22}$$

С помощью замены переменной $\xi=\sin^2\theta$, $0\le\xi\le 1$ уравнение (16) приводится к гипергеометрическому дифференциальному уравнению Гаусса [1]

$$\xi(\xi-1)\Upsilon''(\xi)+\left(\frac{1+\beta}{2}-\left(1+\frac{1+\alpha}{2}\right)\xi\right)\Upsilon'(\xi)+\frac{\mu}{4}\Upsilon(\xi)=0\,,\quad 0<\xi<1\,, \tag{23}$$

где $\Upsilon(\xi)=\Psi(\theta)=\Psi(\arcsin\sqrt{\xi})$.

Так как $\Upsilon'(\xi)=\sin^{-1}2\theta\Phi'(\theta)$, то краевые условия (21) и (22) по переменной ξ имеют вид

$$\lim_{\xi\to 1}(1-\xi)^{\alpha/2}\frac{\Upsilon(\xi)}{\Upsilon'(\xi)}=0\,, \tag{24}$$

$$\lim_{\xi\to 1}\xi^{\beta/2}\frac{\Upsilon(\xi)}{\Upsilon'(\xi)}=0\,. \tag{25}$$

Известно [2], что собственными значениями краевой задачи (23) – (25) являются числа

$$\mu=\mu_n=2n(2n+\alpha+\beta),\ n=0,1,2,\ldots, \tag{26}$$

а соответствующими им собственными функциями будут функции

$$\Upsilon_n(\xi)=k_nP_n^{\left(\frac{\beta-1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\right)}(1-2\xi),\quad 0\le\xi\le 1,$$

где $k_n=\dfrac{n!}{\left(\frac{1+\beta}{2}\right)_n}$, $\left(\dfrac{1+\beta}{2}\right)_n=\dfrac{1+\beta}{2}\left(1+\dfrac{1+\beta}{2}\right)\ldots\left(n-1+\dfrac{1+\beta}{2}\right)$, $n\ge 1$,

$\left(\dfrac{1+\beta}{2}\right)_0=1$, $P_n^{\left(\frac{\beta-1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\right)}(1-2\xi)$ – многочлен Якоби порядка $n=0,1,2,\ldots$ Таким образом, собственными функциями краевой задачи (16), (21) и (22) являются функции

$$\Psi_n(\theta)=\Upsilon_n(\sin^2\theta)=P_n^{\left(\frac{\beta-1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\right)}(\cos 2\theta),\quad 0<\theta<\pi/2,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{27}$$

Теперь найдем решения дифференциального уравнения (17), удовлетворяющие граничному условию (18). Данная задача при $\mu=\mu_n=2n(2n+\alpha+\beta)$ принимает вид

$$r^2R_n''(r)+(1+\alpha+\beta)rR_n'(r)+(\lambda^2r^2-\mu_n)R_n(r)=0\,, \tag{28}$$

$$R_n(r)\big|_{r=1} = 0\,, \tag{29}$$

Общее решение уравнения (28) имеет вид

$$R_n(r) = r^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(A_n J_{\nu_n}(\lambda_n r) + B_n Y_{\nu_n}(\lambda_n r)\right), \tag{30}$$

где $J_{\nu_n}(\lambda_n r)$, $Y_{\nu_n}(\lambda_n r)$ – функции Бесселя соответственно первого и второго родов порядка $\nu_n = 2n + \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Требуя, чтобы функция $R_n(r)$ была регулярным решением уравнения (28), положим $B_n = 0$, $A_n \neq 0$.

Параметр λ_n найдем из требования, чтобы функция (30) удовлетворяла граничному условию (29). Для этого, подставляя функцию (30) в граничное условие (29), находим, что λ_n может принимать бесчисленное множество значений, равных

$$\lambda_n = \eta_{n,m} \tag{31}$$

где $\eta_{n,m}$ положительные корни уравнения

$$J_{\nu_n}(\eta_n) = 0\,,$$

причем $\eta_{n,1} < \eta_{n,2} < \ldots < \eta_{n,m} < \ldots$

Каждому собственному значению будет соответствовать собственная функция

$$R_{n,m}(r) = r^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} J_{\nu_n}(\eta_{n,m} r)\,. \tag{32}$$

Значениям параметра

$$\lambda^2 = \lambda_{n,m}^2 = \eta_{n,m}^2$$

соответствуют решения уравнения (10)

$$T_{n,m} = C_{n,m} e^{-\eta_{n,m}^2 t}\,.$$

Решение задачи (4) – (8) ищем в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} e^{-\eta_{n,m}^2 t} r^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} J_{\nu_n}(\eta_{n,m} r) P_n^{\left(\frac{\beta-1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\right)}(\cos 2\theta) \tag{33}$$

Здесь $C_{n,m}$ – пока неопределенные постоянные. Их находим из требования, чтобы функция, определяемая рядом (33), удовлетворяла начальному условию (5)

$$u(r,\theta,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} r^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} J_{\nu_n}(\eta_{n,m} r) P_n^{\left(\frac{\beta-1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\right)}(\cos 2\theta) = \Phi(r,\theta)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} J_{\nu_n}(\eta_{n,m} r)\right) P_n^{\left(\frac{\beta-1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\right)}(\cos 2\theta) = r^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\Phi(r,\theta)\,. \tag{34}$$

Ряд (34) представляет собой разложение функции $\Phi(r,\theta)$ в ряд Фурье по многочленам Якоби. Известно [3], что коэффициенты разложения (34) определяются по формулам

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} J_{\nu_n}(\eta_{n,m} r) = H^2_{\alpha,\beta,n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \Phi(r,\theta) P_n^{\left(\frac{\beta-1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\right)}(\cos 2\theta) \cos^{\alpha}\theta \sin^{\beta}\theta d\theta, \qquad (35)$$

где $H^2_{\alpha,\beta,n} = \sqrt{\dfrac{n!\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+2n\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+n\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+n\right)}}$.

Ряд (35), в свою очередь, представляет собой разложение функции $H^2_{\alpha,\beta,n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \Phi(r,\theta) P_n^{\left(\frac{\beta-1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\right)}(\cos 2\theta) \cos^{\alpha}\theta \sin^{\beta}\theta d\theta$ в ряд по функциям Бесселя на интервале $(0,1)$. Известно [4], что коэффициенты разложения (35) определяются по формулам

$$C_{n,m} = \frac{2H^2_{\alpha,\beta,n}}{\eta_{n,m} J^2_{\nu_n+1}(\eta_{n,m})} \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \Phi(r,\theta) P_n^{\left(\frac{\beta-1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\right)}(\cos 2\theta) J_{\nu_n}(\eta_{n,m} r) r^{\frac{\alpha+\beta+2}{2}} \cos^{\alpha}\theta \sin^{\beta}\theta d\theta dr, \qquad (36)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Доказана

Теорема. Если функция $\Phi(r,\theta)$ имеет на интервале $(0,R)$ непрерывную частную производную второго порядка по переменной r и $\Phi(0,\theta) = \Phi(R,\theta) = \Phi'_r(0,\theta) = 0$, а по переменной θ непрерывно дифференцируема q раз на сегменте $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и $\frac{\partial^q \Phi(r,\theta)}{\partial \theta^q} \in Lip\gamma$, где $0 < \gamma \le 1$, причем выполняется условие $q + \gamma > \frac{k+1}{2}$, то существует единственное решение задачи (4) – (8), определяемое суммой ряда (33), коэффициенты которого вычисляются по формулам (36).

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М., 1973.

[2] Хе К.Ч. О собственных однородных краевых задач для эллиптического уравнения с оператором Бесселя // Неклассические уравнения математической физики: IV Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математики (ИНПРИМ–2003), посвященный памяти М.А.Лаврентьева. Новосибирск, 2000. С.128-135.

[3] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М., 1979.

[4] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.