УДК 517.917

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМАМИ НА ОСИ АБСЦИСС

© И.Х.Мударисов, М.Ю.Денисова, Р.Р.Насибуллов

В статье рассматривается дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dx} = -\frac{F(x,y)}{y}$. Проведено качественное исследование и найдены случаи особых точек типа центра.

В практических задачах, связанных с теорией колебаний, с теорией устойчивости движений физических систем, обычно встречаются дифференциальные уравнения вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{1}$$

Уравнение (1) находит широкое применение при изучении периодических свободных колебаний, после ряда преобразований оно сводится к виду (2):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F(x,y)}{y}. \tag{2}$$

Допустим, $F(x,y)$ – аналитическая функция и представима в виде

$$F(x,y) = \omega_0(x) + y\omega_1(x) + y^2\omega_2(x,y),$$

где $\omega_0(x) = \sum_{k=1}^{7} \alpha_k x^k$, $\omega_1(x) = \sum_{k=0}^{7} \beta_k x^k$, $\omega_2(x,y) = \sum_{s=0}^{7}\sum_{k=0}^{7} \alpha_{sk} x^s y^k$. Известно, что когда дискриминант уравнения (2) $\Delta > 0$; $\Delta = 0$ интегральные кривые будут входить в начало с определенными направлениями касательных. В этом случае начало координат принадлежит к особой точке первой группы.

Уравнение (2) имеет все свои особые точки на оси абсцисс, которые находятся без особого труда. При $y = 0$ получаем

$$\alpha_{20}x + \alpha_{30}x^2 + \alpha_{40}x^3 + \alpha_{50}x^4 + \\ +\alpha_{60}x^5 + \alpha_{70}x^6 = -1.$$

В случае простых нулей функции $\omega_0(x)$ типы особых точек легко устанавливаются согласно [2]. Седло чередуется с антиседлом. Антиседла должны иметь абсциссы, являющиеся корнями НОД функции $\omega_0(x)$ и $\omega_1(x)$. Методом [3] находим следующие условия центра:

$d_1 = \alpha_{21} + 3\alpha_{03} = 0,$

$d_2 = 5\alpha_{05} + \alpha_{23} + \alpha_{41} = 0,$

$d_3 = -6\alpha_{03}^3 + 35\alpha_{07} + 5\alpha_{25} + 3\alpha_{43} + 5\alpha_{61} = 0,$

$d_4 = \alpha_{03}^2\left(21\alpha_{05} + 9\alpha_{41} - 7\alpha_{23}\right) = 0,$

$$d_5 = \left[94\frac{8}{9}\alpha_{23}^2 - 3\left(\alpha_{25} + 36\alpha_{43} + \right.\right. \\ \left.\left. +95\alpha_{61} - 972\alpha_{03}^3\right)\alpha_{03}\right]\alpha_{03} = 0.$$

Из всех условий вытекает: если, $3\alpha_{05} + 2\alpha_{23} \neq 0$, то $\alpha_{03} = 0$. Тогда $d_1 = d_4 = d_5 = 0$.

Значит уравнение (2) имеет случай центра в двух случаях:

1. $\alpha_{21} = -3\alpha_{03}$, $\alpha_{05} = -\frac{2}{3}\alpha_{23}$, $\alpha_{41} = \frac{7}{3}\alpha_{23}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.
2. $\alpha_{03} = d_2 = \gamma_3 = 0$,

где $\gamma_1 = d_3$, $\gamma_2 = \left[94\frac{8}{9}\alpha_{23}^2 - 3\left(\alpha_{25} + 36\alpha_{43} + 95\alpha_{61} - \right.\right.$ $\left.\left.-972\alpha_{03}^3\right)\alpha_{03}\right]\alpha_{03} = 0$,

$\gamma_3 = 35\alpha_{07} + 5\alpha_{25} + 3\alpha_{41} + 5\alpha_{61}$.

Начиная с четвертого, во всех определителях α_{03} входит как общий множитель.

Найденные условия $d_4 = d_5 = 0$ подтверждают: для того, чтобы уравнение (2) имело центр, необходимо и достаточно, чтобы $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$. При выполнении этих условий остальные будут выполняться тождественно.

* * * * * * * * * *

1. Андронов А.А. // Собрание трудов. Горький, 1956. С.107.
2. Латфуллин Г.М. Качественное исследование дифференциального уравнения с особыми точками на оси абсцисс // Волжский математический сборник, Вып.3, Куйбышев, 1965. С.217-234.
3. Куклес И.С., Нуров Т.Н. Об условиях центра // Известия АН СССР. Серия физмат, 1963, №4. С.98-99.

QUALITATIVE INVESTIGATION OF SINGULAR POINTS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POLYNOMINAL ON THE AXIS OF ABSCISSAS

I.K.Mudarisov, M.Y.Denisova, R.R.Nasibullov

In the article we analyze the differential equation(s) of the form: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F(x,y)}{y}$. Qualitative in vestigation of the equation is described in the article. Cases of center type singularities are found.