МАТЕМАТИКА

Н.А.Бариева, И.А.Бикчантаев

ЗАДАЧА РИМАНА НА ДВУЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ПРОЕКЦИИ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ КОТОРОЙ ИМЕЮТ ДВЕ ТОЧКИ СГУЩЕНИЯ

Пусть R есть двулистная накрывающая плоскости комплексного переменного с бесконечным числом точек ветвления, проекции которых на C сгущаются в бесконечности и в начале координат, Г – произвольный кусочно-гладкий контур на R, D – заданный на R \ Г дивизор. Рассматривается краевая задача Римана в следующей постановке.

Требуется найти кусочно-мероморфную функцию F на R с линией скачков Г, кратную дивизору 1/D и ограниченную в окрестности идеальной границы поверхности R, предельные значения которой на Г удовлетворяют соотношению

$$F^{+}(t)=G(t)F^{-}(t)+g(t),\ t\in\Gamma, \qquad (1)$$

где G и g – заданные функции.

Получены условия разрешимости задачи (1) и вид ее общего решения.

Введение

В работах Л.И.Чибриковой и Э.И.Зверовича было получено в квадратурах решение краевой задачи Римана на компактной римановой поверхности. В работах И.А.Бикчантаева на некомпактной римановой поверхности была построена ее нетерова теория и вычислены дефектные числа. На произвольной открытой римановой поверхности эта задача была решена в явном виде лишь в случаях, когда коэффициент задачи равен 1 или -1. В работе И.А.Бикчантаева [1] получены условия разрешимости и дано явное решение краевой задачи Римана на ультрагиперэллиптической поверхности R в случае произвольного кусочно-гладкого контура Г. При этом решение (в общем случае) выражается через интегралы, ядрами которых служат аналоги ядра Коши на некоторой вспомогательной гиперэллиптической поверхности. В том случае, когда контур Г не разбивает поверхности R, оказалось, что можно обойтись более элементарными средствами, чем при решении задачи Римана на компактной поверхности (в частности, гиперэллиптической). А именно, не используется проблема обращения Якоби (или какой-либо ее аналог), вместо аналогов ядра Коши на римановой поверхности используется обычное ядро Коши на комплексной плоскости. Целью данной статьи является распространение части этих результатов на случай двулистной римановой поверхности, проекции точек ветвления которой имеют две точки сгущения.

1. Предварительные сведения и обозначения

Пусть $(R,\ z)$ есть безграничная двулистная накрывающая проколотой комплексной плоскости $\mathbf{C}\backslash\{0\}$, проекции точек ветвления которой сгущаются к точкам $z = 0$ и $z = \infty$. Накрывающая $(R,\ z)$ может быть реализована как риманова поверхность функции $u(z)$, определяемой уравнением $u^2=P(z)$, где $P(z)$

– голоморфная в $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ функция с бесконечным числом простых нулей, имеющих две точки сгущения z = 0 и $z = \infty$. Через j обозначим отличное от тождественного преобразование наложения накрывающей (R, z), то есть конформный автоморфизм поверхности R, удовлетворяющий соотношению $z(j(q))=z(q)$ для всех $q\in R$.

Пусть Γ есть кусочно-гладкая линия на R и $\zeta(q)$ есть голоморфная функция в окрестности Γ, такая, что $d\zeta$ не имеет нулей на Γ. Тогда ζ является локальной униформизирующей в окрестности любой точки $\tau\in\Gamma$. Если Γ не содержит точек ветвления накрывающей (R, z), то можно взять $\zeta = z$. Если $\tau\in\Gamma$ есть точка ветвления, то в ее окрестности z и ζ связаны соотношением вида $z - z(\tau)=(\zeta - \zeta(\tau))^2 a(\zeta)$, где $a(\zeta)$ есть функция, голоморфная в точке $\zeta =\zeta(\tau)$ и $a(\zeta(\tau))\neq 0$.

Пусть α: [0, 1]$\to R$ – путь на R. Его длиной мы назовем длину плоского пути $z\circ\alpha$: [0, 1]$\to \mathbf{C}$, то есть $\int_0^1 \left|d\left(z\circ\alpha\right)\right|$. Расстоянием $\rho(p, q)$ между точками p и q на R назовем точную нижнюю грань длин всех путей, соединяющих p и q. Используя локальную однолистность функции $\zeta(q)$, нетрудно показать, что найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что из неравенств $\rho(t_1, t_2) \le \varepsilon$, $t_1\neq t_2$ вытекает неравенство $\zeta(t_1) \neq \zeta(t_2)$, t_1, $t_2\in\Gamma$. Обозначим через T множество всех узлов контура Γ. На T определим действительнозначную функцию $\lambda=\lambda(\tau)$. По аналогии с [2] введем пространство $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, состоящее из функций на Γ, H_μ-непрерывных вне любой окрестности множества T и ведущих себя вблизи T как весовая функция

$$\rho_\lambda(t) = \prod_{\tau\in T} |\zeta(t)-\zeta(\tau)|^{\lambda(\tau)}.$$

Пространство $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$ банахово относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mu,\lambda} = \sup_{t\in\Gamma} |\varphi(t)\rho_{-\lambda}(t)| + \{\rho_{\mu-\lambda}\varphi\}_\mu,$$

где

$$\{\varphi\}_\mu = \sup_{t_1,t_2\in\Gamma,\rho(t_1,t_2)<\varepsilon,t_1\neq t_2} \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|\zeta(t_1)-\zeta(t_2)|^\mu}.$$

Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы множества

$$\Gamma_\tau = \Gamma \bigcap \{q\in R: 0<\rho(q,\tau)\le\delta\}, \tau\in T,$$

попарно не пересекались и распадались на компоненты $\Gamma_{\tau,i}$, $1\le i \le n_\tau$, $\tau\in T$. Введем класс $H_{\mu,(\lambda)}(\Gamma, T)$ функций $\varphi(t)$, которые H_μ-непрерывны на Γ вне любой окрестности множества T и на каждом Γ_τ, $\tau\in T$, представимы в виде

$$\varphi(t)=p_{\tau,i}(t)+\varphi_\tau(t),\ t\in\Gamma_{\tau,i},$$

где $p_{\tau,i}$ – многочлен степени меньше, чем $\lambda(\tau)$ (многочлен отрицательной степени условимся считать равным нулю), $\varphi_\tau \in H_{\mu,\lambda(\tau)}(\Gamma_\tau, \tau)$. Пространство $H_{\mu,(\lambda)}(\Gamma, T)$ банахово относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mu,(\lambda)} = \sum_{\tau\in T}\left(\sum_{i=1}^{n_\tau}\sup_{\Gamma_\tau} |p_{\tau,i}| + \|\varphi_\tau\|_{H_{\mu,\lambda(\tau)}(\Gamma_\tau,\tau)}\right) + \|\varphi\|_{H_\mu(\Gamma')},$$

где $\Gamma' = \Gamma \bigcap \{q : \rho(q,T) \geq \delta/2\}, \quad \rho(q,T) = \min_{\tau\in T} \rho(q,\tau)$.

2. Краевая задача Римана

1. Пусть Γ – кусочно-гладкий контур на R, такой, что каждая компонента $R \setminus \Gamma$ имеет род, равный бесконечности; число таких компонент равно 1 или 2. Будем предполагать, что $z(\Gamma)$ тоже есть кусочно-гладкий контур на **C**, причем Γ и $z(\Gamma)$ не имеют точек возврата. Ориентацию на Γ выберем так, чтобы на линейных участках контура, имеющих одинаковые проекции на z-плоскость **C**, она была согласована относительно преобразования наложения j. Тогда ориентацию Γ можно определить как индуцированную отображением $z:\Gamma\to z(\Gamma)$.

Зададим дивизор D, носитель которого лежит в $R \setminus \Gamma$, и функции $G \in H_{\mu,(\mu)}(\Gamma, T)$ и $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0<\mu< 1$, $-1<\lambda <0$, причем $G(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$. Рассмотрим краевую задачу Римана в следующей постановке.

Найти кусочно-мероморфную функцию F на R с линией скачков Γ, кратную дивизору $1/D$ и ограниченную в окрестности идеальной границы поверхности R, предельные значения которой на Γ принадлежат классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0<\mu< 1$, $-1<\lambda <0$, и удовлетворяют соотношению

$$F^{+}(t)=G(t)F^{-}(t)+g(t),\ t\in\Gamma. \qquad (1)$$

2. Через $q(z)$ будем обозначать точку на R такую, что $z(q(z))=z$ (поднятие точки $z\in$ **C** на накрывающую (R, z)). Если F есть решение задачи (1), то функция $(F(j(q(z)))-F(q(z)))^2$ голоморфно продолжима в точки $z=\infty$ и $z=0$, являющиеся точками сгущения ее нулей. Следовательно, $F\circ j = F$ и функция $f(z)=F(q(z))$ однозначна в $\mathbf{C} \setminus z(\Gamma)$ и аналитически продолжима в $\mathbf{C} \setminus \gamma$, где γ есть множество точек на $z(\Gamma)$, имеющих два прообраза при отображении z: $\Gamma \to z(\Gamma)$ (точки ветвления накрывающей (R, z) при этом считаются дважды).

3. Множество M на римановой поверхности или на плоскости называется AB-устранимым, если для некоторой окрестности U множества M любая аналитическая и ограниченная в $U \setminus M$ функция аналитически продолжима в U. Определим в **C** дивизор Δ, полагая $\mathrm{ord}_{z(q)}\Delta = \min(\mathrm{ord}_q D, \mathrm{ord}_{j(q)} D)$ при $j(q)\neq q$ и $\mathrm{ord}_{z(q)}\Delta = [(1/2)\ \mathrm{ord}_q D]$ при $j(q)=q$, где [ ] означает целую часть числа. Если множество γ является AB-устранимым, то функция f аналитически продолжима на всю комплексную плоскость **C** и является рациональной функцией, кратной дивизору $1/\Delta$. Из условия (1) вытекает, что в случае разрешимости задачи Римана функции G и g удовлетворяют соотношению

$$g(t)=(1-G(t))f(z(t)),\ t\in\Gamma, \qquad (2)$$

где f есть рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. Если это соотношение выполняется, то функция $F(q)=f(z(q))$ является решением краевой задачи Римана (1). Отсюда вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть γ является AB-устранимым множеством. Тогда для разрешимости краевой задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно, чтобы функции G и g были связаны соотношением* (2)*, где f --- рациональная функция, кратная дивизору* $1/\Delta$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При ord $\Delta<0$ задача (1) имеет решение (равное нулю) только при $g=0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $G=1$, то для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно, чтобы $g=0$. При этом любое решение задачи (1) имеет вид $F(q)=f(z(q))$, где f – рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. Число линейно независимых решений равно max (0, ord $\Delta+1$).

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $G\neq 1$, то задача (1) не может иметь более одного решения.

Действительно, при $g=0$ условие (2) может выполняться только при $f=0$. Поэтому соответствующая однородная задача (1) имеет лишь нулевое решение.

4. Предположим теперь, что множество γ не является *AB*-устранимым; при этом его линейная мера будет положительной. Обозначим через Γ_1 кривую на R, гомеоморфную $z(\Gamma)$ относительно отображения z: $\Gamma_1\to z(\Gamma)$. Тогда $\Gamma_2:=j(\Gamma_1)$ тоже гомеоморфна $z(\Gamma)$ относительно отображения z и $\Gamma_1\bigcup\Gamma_2=z^{-1}(z(\Gamma))$. Через ρ_k: $z(\Gamma)\to\Gamma_k$, $k=1, 2$, обозначим гомеоморфизм $z(\Gamma)$ на Γ_k, такой, что $z(\rho_k(\xi))=\xi$ при $\xi\in z(\Gamma)$. Ориентацию на Γ_k выберем таким образом, чтобы индуцированная ею при проектировании z: $R\to\mathbf{C}$ ориентация на $z(\Gamma)$ совпадала бы с уже выбранной в п. 1.

Доопределим G и g на $\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$, полагая $G=1$, $g=0$ в точках, не принадлежащих Γ. Тогда функция f на $z(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$f^+(\xi)=G(\rho_k(\xi))f^-(\xi)+g(\rho_k(\xi)),\ \xi\in z(\Gamma). \qquad (3_k)$$

Здесь функции $G(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,(\mu')}(z(\Gamma), z(T))$, где

$$\mu'(z(\tau))=\begin{cases}\mu, & \tau\in T,\ \ j(\tau)\neq\tau,\\ \dfrac{1}{2}\mu, & \tau\in T,\ \ j(\tau)=\tau.\end{cases}$$

Функции $g(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$, где

$$\nu(z(\tau))=\begin{cases}\min(\lambda(\tau),\lambda(j(\tau))), & \tau,\ j(\tau)\in T,\ j(\tau)\neq\tau,\\ \lambda(\tau), \ \ \tau\in T,\ j(\tau)\neq T,\\ \dfrac{1}{2}\lambda(\tau),\ \ j(\tau)=\tau\in T.\end{cases}$$

Решение задачи (3_k) будем отыскивать в классе функций, предельные значения которых на $z(\Gamma)$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$.

Таким образом, функция f является одновременно решением двух краевых задач Римана на контуре $z(\Gamma)$. Из условия на Γ следует, что каждая компонента $\mathbf{C}\setminus\gamma$ содержит бесконечное множество проекций точек ветвления. В точки множества $z(\Gamma)\setminus\gamma$ функция f аналитически продолжима и, следовательно, является аналитической в области $\mathbf{C}\setminus\gamma$ за исключением, возможно, конечного числа полюсов. Поэтому для совпадения решений краевых задач (3_1) и (3_2) достаточно потребовать их совпадения в окрестности некоторых точек из $\mathbf{C}\setminus z(\Gamma)$ по одной в каждой компоненте $\mathbf{C}\setminus\gamma$.

5. Если $G\circ j = G$ на $\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$, то, поскольку $F\circ j = F$, для разрешимости задачи (1) необходимо, чтобы $g\circ j = g$ на $\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$. Тогда задачи (3_1) и (3_2) совпадают. Если f – решение задачи (3_k), то $F(q)=f(z(q))$ будет решением задачи (1).

Обозначим через $\mathrm{X}(z)$ каноническую функцию задачи (3_k), предельные значения которой на Γ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma), z(T))$ и имеющую максимально возможный порядок κ на бесконечности. Тогда при $\kappa + \mathrm{ord}\,\Delta \geq -1$ задача (3_k) разрешима при любой функции $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$,\ \ $0<\mu<1$, $-1<\lambda<0$, и ее общее решение имеет вид

$$f(z)=\frac{\mathrm{X}(z)}{2\pi i}\int\limits_{z(\Gamma)}\frac{g(\rho_k(\xi))d\xi}{\mathrm{X}^+(\xi)(\xi-z)}+\mathrm{X}(z)\delta(z), \qquad (4)$$

где δ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\kappa}$.

При $\kappa + \mathrm{ord}\,\Delta < -1$ необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (3_k), а следовательно, и задачи (1), имеют вид

$$\int\limits_{z(\Gamma)}\frac{g(\rho_k(\xi))\omega_j(\xi)d\xi}{\mathrm{X}^+(\xi)}=0,\quad j=1,\ldots,-\kappa-\mathrm{ord}\,\Delta-1, \qquad (5)$$

где ω_j – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\kappa+2}$. При выполнении условий (5) задача (3_k) имеет единственное решение вида (4), где $\delta = 0$.

Условия (5) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Gamma\bigcap\Gamma_k} g\theta_j=0,\quad j=1,\ldots,-\kappa-\mathrm{ord}\,\Delta-1, \qquad (6)$$

где $\theta_j(t)=(\mathrm{X}^+(z(t)))^{-1}\omega_j(z(t))dz(t)$. Общее решение задачи (1) имеет вид

$$F(q)=\frac{\mathrm{X}(z(q))}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\bigcap\Gamma_k}\frac{g(t)dz(t)}{\mathrm{X}^+(z(t))(z(t)-z(q))}+\mathrm{X}(z(q))\delta(z(q))\,. \qquad (7)$$

В формулах (6) и (7) k может принимать любое из значений 1 или 2.

Таким образом, доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть γ имеет положительную линейную меру, и коэффициент G задачи* (1) *удовлетворяет соотношению $G\circ j=G$ на $\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$. Тогда для разрешимости задачи* (1) *необходимо и достаточно, чтобы функция g удовлетворяла условиям $g\circ j=g$ на $\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$ и* (6)*. При их выполнении общее решение задачи* (1) *имеет вид* (7)*, где δ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\kappa}$. Однородная* ($g$=0) *задача* (1) *имеет $l=\max(0,\ \mathrm{ord}\ \Delta+\kappa+1)$ линейно независимых решений.*

6. Пусть γ такое же, как в предыдущем пункте. Здесь будем предполагать, что $G\circ j \neq G$. Ясно, что при этом однородная (g=0) задача Римана (1) имеет лишь нулевое решение, а неоднородная может иметь не более одного решения. В рассматриваемом случае функция f является решением одновременно двух различных краевых задач Римана (3_1) и (3_2). Обозначим через $\mathrm{X}_k(z)$ каноническую функцию (того же класса, что и в п. 5) задачи (3_k), κ_k =

$\mathrm{ord}_\infty\ \mathrm{X}_k(z)$. При κ_k + ord $\Delta \geq -1$ задача (3_k) безусловно разрешима, и ее общее решение имеет вид

$$f_k(z) = \frac{\mathrm{X}_k(z)}{2\pi i} \int\limits_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))d\xi}{\mathrm{X}_k^+(\xi)(\xi - z)} + \mathrm{X}_k(z)\delta_k(z), \tag{8}$$

где $\delta_k\ (z)$ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\kappa_k}$. При κ_k + ord $\Delta < -1$ для разрешимости задачи (3_k) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int\limits_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))}{\mathrm{X}_k^+(\xi)} \omega_{kj}(\xi)d\xi = 0, \quad j = 1,...,-\kappa_k - \mathrm{ord}\ \Delta - 1, \tag{9}$$

где ω_{kj} – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\kappa_k+2}$. Полагая

$$\theta_{kj}(t) = \frac{\omega_{kj}(z(t))dz(t)}{\mathrm{X}_k^+(z(t))},$$

условие (9) перепишем в виде

$$\int\limits_{\Gamma\cap\Gamma_k} g\theta_{kj} = 0, \quad j = 1,...,-\kappa_k - \mathrm{ord}\ \Delta - 1,\ k=1,\ 2. \tag{10}$$

При выполнении условий (10) задача (3_k) имеет единственное решение вида (8), где δ_k=0. Для того, чтобы функции f_k определяли решение исходной задачи (1), должно выполняться равенство $f_1 = f_2$. В силу сказанного в п. 4, достаточно потребовать выполнения этого равенства в окрестности некоторой точки $z_0 \in \mathbf{C} \setminus z(\Gamma)$, если $\mathbf{C} \setminus \gamma$ связно и в окрестностях двух точек z_0' и z_0'', по одной в каждой компоненте $\mathbf{C} \setminus \gamma$, если $\mathbf{C} \setminus \gamma$ состоит из двух компонент.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{C} \setminus \gamma$ связно. Пусть z_0 есть точка из $\mathbf{C} \setminus z(\Gamma)$, в которой функции X_k и f_k голоморфны. Используем ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{\mathrm{X}_k(z)}{2\pi i\mathrm{X}_k^+(\eta)(\eta - z)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj}(\eta)(z - z_0{}^j).$$

Пусть δ_{kj}, j=1,…, κ_k + ord Δ +1 – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\kappa_k}$, k=1, 2. Тогда

$$\mathrm{X}_k(z)\delta_k(z) = \sum_{n=1}^{\kappa_k + \mathrm{ord}\ \Delta + 1} a_{kn}\mathrm{X}_k(z)\delta_{kn}(z),$$

где a_{kn} – комплексные числа. Разлагая функции $\mathrm{X}_k\ \delta_{kn}$ в ряд Тейлора, получим

$$\mathrm{X}_k(z)\delta_{kn}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{knj}(z - z_0)^j.$$

Сравнивая коэффициенты тейлоровских разложений функций f_1 и f_2, получим соотношения, эквивалентные равенству $f_1 = f_2$:

$$\sum_{n=1}^{\kappa_1+\mathrm{ord}\,\Delta+1} a_{1n}a_{1nj} - \sum_{n=1}^{\kappa_2+\mathrm{ord}\,\Delta+1} a_{2n}a_{2nj} =$$
$$= -\int_{z(\Gamma)} (g(\rho_1(\eta))c_{1j}(\eta) - g(\rho_2(\eta))c_{2j}(\eta))d\eta,\ j=0,1,2,.... \tag{11}$$

Обозначим через A матрицу системы (11) и положим

$$\alpha_j(t) = \begin{cases} -c_{1j}(z(t))dz(t), & t\in\Gamma\bigcap\Gamma_1, \\ c_{2j}(z(t))dz(t), & t\in\Gamma\bigcap\Gamma_2, \end{cases}$$
$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ...)^t,$$
$$a = (a_{11}, ..., a_{1,\kappa_1+\mathrm{ord}\,\Delta+1}, a_{21}, ..., a_{2,\kappa_1+\mathrm{ord}\,\Delta+1})^t.$$

Тогда система (11) запишется в виде

$$Aa = \int_\Gamma g\alpha. \tag{12}$$

В силу единственности решения задачи Римана (1) ранг r матрицы A должен быть равен числу неизвестных a_{kn}, то есть $r = \max(0, \kappa_1+ \mathrm{ord}\,\Delta +1)+ \max(0, \kappa_2+ \mathrm{ord}\,\Delta +1)$.

Пусть B – невырожденная квадратная матрица порядка r, составленная из строк матрицы A с номерами $j_1, j_2,\ldots, j_r$ ($j_1 < j_2 <\ldots <j_r$), B_j – квадратная матрица порядка $r+1$, составленная из $r +1$ строк расширенной матрицы $(A, \int_\Gamma g\alpha)$ с номерами $j_1, j_2,\ldots,j_r, j$. Тогда

$$\det B_j = \int_\Gamma g\beta_j,$$

где

$$\beta_j = \sum_{n=1}^{r} B_{j,j_n}\alpha_{j_n} + B_{j,j}\alpha_j,$$

$B_{j,k}$ – алгебраическое дополнение элемента $\int_\Gamma g\alpha_k$ матрицы B_j; очевидно, $B_{j,j} = \det B \neq 0$. Если j принимает одно из значений $j_1, j_2,\ldots, j_r$, то $\beta_j=0$. Условия разрешимости системы (11) (или (12)) имеют вид

$$\int_\Gamma g\beta_j = 0,\quad j\in \mathrm{Z},\quad j\geq 0,\quad j\neq j_1, j_2, ..., j_r. \tag{13}$$

Совокупность условий (10) и (13) необходима и достаточна для разрешимости задачи (1). При их выполнении единственное решение задачи (1) определяется равенством $F(q)=f_k(z(q))$, где функция $f_1 = f_2$ определена формулой (8). Таким образом, доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть γ имеет положительную линейную меру,* $\mathbf{C} \setminus \gamma$ *связно и коэффициент G задачи* (1) *удовлетворяет неравенству* $G\circ j \neq G$ *на* $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$. *Тогда для разрешимости задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно выполнения условий* (10) *и* (13). *При их выполнении задача* (1) *имеет един-*

ственное решение, определяемое равенством $F(q)=f_k(z(q))$, где совпадающие между собой функции f_k, k=1, 2, определяются равенством (8).

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{C}\setminus\gamma$ несвязно, то есть состоит из двух компонент. Пусть z_0' и z_0'' – точки из различных компонент $\mathbf{C}\setminus\gamma$, в которых функции X_k и f_k голоморфны. Используем ряды Тейлора в окрестности точек z_0' и z_0'':

$$\frac{\mathrm{X}_k(z)}{2\pi i\mathrm{X}_k^+(\eta)(\eta-z)}=\sum_{j=0}^{\infty}c_{kj}'(\eta)(z-z_0'),\quad \frac{\mathrm{X}_k(z)}{2\pi i\mathrm{X}_k^+(\eta)(\eta-z)}=\sum_{j=0}^{\infty}c_{kj}''(\eta)(z-z_0'').$$

Пусть δ_{kj}, $j=1,\ldots,\kappa_k+\mathrm{ord}\,\Delta+1$ – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\kappa_k}$, k=1, 2. Тогда

$$\mathrm{X}_k(z)\delta_k(z)=\sum_{n=1}^{\kappa_k+\mathrm{ord}\,\Delta+1}a_{kn}\mathrm{X}_k(z)\delta_{kn}(z),$$

где a_{kn} – комплексные числа. Запишем для функции $\mathrm{X}_k\,\delta_{km}$ ряды Тейлора

$$\mathrm{X}_k(z)\delta_{kn}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{knj}'(z-z_0')^j,\quad \mathrm{X}_k(z)\delta_{kn}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{knj}''(z-z_0'')^j.$$

Сравнивая коэффициенты тейлоровских разложений функций f_1 и f_2, получим соотношения, эквивалентные равенству $f_1=f_2$,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\kappa_1+\mathrm{ord}\,\Delta+1}a_{1n}a_{1nj}'-\sum_{n=1}^{\kappa_2+\mathrm{ord}\,\Delta+1}a_{2n}a_{2nj}'=\\&=-\int_{z(\Gamma)}(g(\rho_1(\eta))c_{1j}'(\eta)-g(\rho_2(\eta))c_{2j}'(\eta))d\eta,\ j=0,\ 1,\ 2,\ldots,\\&\sum_{n=1}^{\kappa_1+\mathrm{ord}\,\Delta+1}a_{1n}a_{1nj}''-\sum_{n=1}^{\kappa_2+\mathrm{ord}\,\Delta+1}a_{2n}a_{2nj}''=\\&=-\int_{z(\Gamma)}(g(\rho_1(\eta))c_{1j}''(\eta)-g(\rho_2(\eta))c_{2j}''(\eta))d\eta,\quad j=0,\ 1,\ 2,\ldots.\end{aligned}\tag{11'}$$

Обозначим через A матрицу системы (11'):

$$A=\begin{pmatrix}a_{110}' & a_{120}' & \cdots & a_{1,\kappa_1+ord\Delta+1,0}' & -a_{210}' & -a_{220}' & \cdots & a_{2,\kappa_2+ord\Delta+1,0}'\\ a_{110}'' & a_{120}'' & \cdots & a_{1,\kappa_1+ord\Delta+1,0}'' & -a_{210}'' & -a_{220}'' & \cdots & a_{2,\kappa_2+ord\Delta+1,0}''\\ a_{111}' & a_{121}' & \cdots & a_{1,\kappa_1+ord\Delta+1,1}' & -a_{211}' & -a_{221}' & \cdots & a_{2,\kappa_2+ord\Delta+1,1}'\\ a_{111}'' & a_{121}'' & \cdots & a_{1,\kappa_1+ord\Delta+1,1}'' & -a_{211}'' & -a_{221}'' & \cdots & a_{2,\kappa_2+ord\Delta+1,1}''\\ a_{112}' & a_{122}' & \cdots & a_{1,\kappa_1+ord\Delta+1,2}' & -a_{212}' & -a_{222}' & \cdots & a_{2,\kappa_2+ord\Delta+1,2}'\\ a_{112}'' & a_{122}'' & \cdots & a_{1,\kappa_1+ord\Delta+1,2}'' & -a_{212}'' & -a_{222}'' & \cdots & a_{2,\kappa_2+ord\Delta+1,2}''\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

и положим

$$\alpha_j'(t)=\begin{cases}-c_{1j}'(z(t))dz(t), & t\in\Gamma\bigcap\Gamma_1,\\ c_{2j}'(z(t))dz(t), & t\in\Gamma\bigcap\Gamma_2,\end{cases}\quad \alpha_j''(t)=\begin{cases}-c_{1j}''(z(t))dz(t), & t\in\Gamma\bigcap\Gamma_1,\\ c_{2j}''(z(t))dz(t), & t\in\Gamma\bigcap\Gamma_2,\end{cases}$$

$$\alpha(t)=(\alpha_1'(t),\alpha_1''(t),\alpha_2'(t),\alpha_2''(t),\ldots)^t=:(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\ldots)^t,$$

$$a = (a_{11},...,a_{1,\kappa_1+\mathrm{ord}\,\Delta+1}, a_{21},...,a_{2,\kappa_2+\mathrm{ord}\,\Delta+1})^t.$$

Тогда система (11') запишется в виде

$$Aa = \int_\Gamma g\alpha. \qquad (12')$$

В силу единственности решения задачи Римана (1) ранг r матрицы A должен быть равен числу неизвестных a_{kn}, то есть $r = \max(0, \kappa_1+ \mathrm{ord}\,\Delta +1) + \max(0, \kappa_2+ \mathrm{ord}\,\Delta +1)$.

Пусть B – невырожденная квадратная матрица порядка r, составленная из строк матрицы A с номерами $j_1, j_2,\ldots, j_r$ ($j_1 < j_2 <\ldots <j_r$), B_j – квадратная матрица порядка r+1, составленная из r+1 строк расширенной матрицы $(A, \int_\Gamma g\alpha)$ с номерами $j_1, j_2,\ldots,j_r, j$. Тогда

$$\det B_j = \int_\Gamma g\beta_j,$$

где

$$\beta_j = \sum_{n=1}^{r} B_{j,j_n}\alpha_{j_n} + B_{j,j}\alpha_j,$$

$B_{j,k}$ – алгебраическое дополнение элемента $\int_\Gamma g\alpha_k$ матрицы B_j; очевидно, $B_{j,j} = \det B \neq 0$. Если j принимает одно из значений $j_1, j_2,\ldots, j_r$, то β_j=0. Условия разрешимости системы (11') (или (12')) имеют вид

$$\int_\Gamma g\beta_j = 0, j \in Z, j \geq 0, j \neq j_1, j_2,..., j_r. \qquad (13')$$

Совокупность условий (10) и (13') необходима и достаточна для разрешимости задачи (1). При их выполнении единственное решение задачи (1) определяется равенством $F(q)=f_k(z(q))$, где функция $f_1 = f_2$ определена формулой (8). Таким образом, доказана.

ТЕОРЕМА 3'. *Пусть* Г *имеет положительную линейную меру,* **C** \ γ *состоит из двух компонент и коэффициент G задачи* (1) *удовлетворяет неравенству* $G\circ j \neq G$ *на* $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$. *Тогда для разрешимости задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно выполнения условий* (10) *и* (13'). *При их выполнении задача* (1) *имеет единственное решение, определяемое равенством* $F(q)=f_k(z(q))$, *где совпадающие между собой функции* f_k, k=1, 2, *определяются равенством* (8).

Литература

[1] Бикчантаев И.А. Задача Римана на ультрагиперэллиптической поверхности // Изв. вузов. Математика. 2000. №2. С.19-31.

[2] Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М. 1991.