Ю.Г.Игнатьев, Е.Г.Чепкунова

ТОЧНОЕ ПЛОСКО-СИММЕТРИЧНОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА – МАКСВЕЛЛА ДЛЯ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

1. Введение

В [1] на основе точного решения уравнений релятивистской магнитной гидродинамики (РМГД) на фоне метрики плоской гравитационной волны (ПГВ) был открыт новый класс релятивистских существенно нелинейных явлений, возникающих в сильно замагниченной плазме под действием ПГВ и названных гравимагнитными ударными волнами (GMSW). Суть явления GMSW заключается в том, что сильно замагниченная плазма:

$$\alpha^2 = \frac{H_\perp^2}{4\pi(\varepsilon_0 + p_0)} >> 1,$$

(где $H_\perp$ - перпендикулярная по отношению к направлению распространения ПГВ составляющая напряженности магнитного поля, ε_0 , p_0 - невозмущенные плотность энергии и давление плазмы без учета магнитного поля) аномально сильно реагирует даже на слабую ПГВ при достаточно больших значениях второго параметра GMSW.

В [2] на основе модели энергобаланса плазмы и ПГВ показано, что энергия ПГВ практически полностью передается на ускорение магнитоактивной плазмы (преимущественно в направлении распространения ПГВ) и создание ударной волны с высокими плотностями энергии плазмы и магнитного поля. При этом достигается околосветовая скорость движения плазмы в указанном направлении. Существенное изменение характеристик электромагнитного излучения плазмы в GMSW было использовано в [2] для создания нового экспериментального теста по выявлению гравитационного излучения пульсаров. В частности, в [3] показано, что так называемые гигантские импульсы в радиоизлучении пульсара NP 0532 можно объяснить механизмом GMSW.

В указанных работах рассматривалась локально изотропная плазма, анизотропия создавалась лишь исключительно магнитным полем. В сильных магнитных полях в результате магнитотормозного излучения нарушается локальное термодинамическое равновесие (ЛТР) в плазме. Данная статья посвящена точному исследованию этой проблемы.

2. Тензор Риччи

Будем искать решения уравнений Эйнштейна с плоской симметрией, когда “плоскостью” симметрии является $\Pi\{x^2, x^3\}$. Метрику пространства V^4 сигнатуры (- 1, -1, -1, + 1), допускающей два пространственно-подобных вектора Киллинга:

$$\underset{1}{\xi}^{i} = \delta^{i}_{2}; \quad \underset{2}{i} = \delta^{i}_{3}$$

и соответствующей симметрии ПГВ с поляризацией e_+, можно записать в виде:

$$ds^2 = \mathbf{\Phi} - L^2\,[e^{2\beta}(dx^2)^2 + e^{-2\beta}(dx^3)^2],$$

где

$$L = L(x^1, x^4); \quad \beta = \beta(x^1, x^4) \quad \text{и} \quad \mathbf{\Phi} = d\sigma^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, x^4) -$$

– метрика двумерной псевдоевклидовой поверхности Σ: $x^2 = Const$; $x^3 = Const$.

Таким образом, $V^4 = \Sigma \times \Pi_{\Sigma}$.

Как известно (см., например, [4]), метрику двумерной поверхности всегда можно привести к конформно - плоскому виду. Следовательно, допустимыми преобразованиями координат x^1, x^4, не изменяющими метрику (Π_Σ), метрику V^4 можно привести к виду:

$$ds^2 = e^{2\lambda}[(dx^4)^2 - (dx^1)^2] - L^2\,[e^{2\beta}(dx^2)^2 + e^{-2\beta}\,(dx^3)^2\,, \qquad (1)$$

где $\lambda = \lambda\,(x^1, x^4)$.

Отметим, что метрика (1) инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца в плоскости Σ.

В координатах запаздывающего, u, и опережающего, v, времени:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(t - x), \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(t + x) \qquad (2)$$

метрика (1) принимает вид:

$$ds^2 = 2e^{2\lambda}du\,dv - L^2\,[e^{2\beta}(dx^2)^2 + e^{-2\beta}\,(dx^3)^2\,. \qquad (3)$$

Метрика (1) совпадает с осесимметричной метрикой [5]. Исходя из этого, получим ненулевые компоненты тензора Риччи, которые в координатах u и v примут вид:

$$R_{uu} = -2\,/\,L\,(L_{uu} + L\,\beta_u^{\;2} - 2\,\lambda_u\,L_u);$$

$$R_{vv} = -2\,/\,L\,(L_{vv} + L\,\beta_v^{\;2} - 2\,\lambda_v\,L_v);$$

$$R_{uv} = -\,2\,/\,L\,(L_{uv} + L\,\beta_u\,\beta_v + L\,\lambda_{uv});$$

$$R_2^{\;2} + R_3^{\;3} = -\,2\,e^{-2\lambda}\,(L^2)_{uv}/\,L^2;$$

$$R_2^{\;2} - R_3^{\;3} = -\,4\,e^{-2\lambda}\,(\beta_{uv} + (L_u\,\beta_v + L_v\,\beta_u)\,/\,L).$$

3. Условия вмороженности магнитного поля и уравнения Эйнштейна

Будем исследовать движение магнитоактивной плазмы в метрике (1). В [1] показано, что электромагнитное поле магнитоактивной плазмы должно удовлетворять условиям вмороженности в плазму:

$$F_{ik}\,v^k = 0, \qquad (4)$$

где v^k - вектор динамической скорости плазмы, который совпадает с вектором динамической (по Сингу [5]) скорости электромагнитного поля. При этом первый инвариант электромагнитного поля равен нулю:

$$F^{ik} \overset{*}{F}_{ik} = 0,$$

а второй инвариант положителен:

$$\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} = -(H, H) \equiv H^2 > 0, \tag{5}$$

где – H_i вектор напряженности магнитного поля:

$$H_i = v^k \overset{*}{F}_{ki},$$

а $\overset{*}{F}_{ki}$ - тензор, дуальный к кососимметрическому тензору Максвелла F_{ki}.

В [1] показано, что полный тензор энергии - импульса (ТЭИ) локально изотропной магнитоактивной плазмы имеет вид:

$$T_{ik} = (\varepsilon + P)\, v_i\, v_k - P\, g_{ik} - 2\, P_H\, n_i\, n_k, \tag{6}$$

где $P_H = H^2 / 8\pi;$ $\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon_H;$ $P = p + P_H,$

P, ε - суммарные давление и плотность энергии магнитоактивной плазмы, а $n_i = H_i / H$ – единичный пространственно-подобный вектор направления магнитного поля:

$$(n, n) = -1,$$

причем,

$$(n, v) = 0.$$

В условиях плоской симметрии будем рассматривать плазму, движущуюся в направлении x^1 и магнитным полем, направленным вдоль x^2. Такому полю соответствует векторный потенциал [1]:

$$A_u = A_v = A_2 = 0, \qquad A_3 = \psi(u, v). \tag{7}$$

где ψ – произвольная функция своих аргументов. Вычисляя тензор Максвелла относительно потенциала (7), найдем его ненулевые компоненты:

$$F_{u3} = \psi_u\,, \qquad\qquad F_{v3} = \psi_v\,.$$

Вычисляя инвариант (5), найдем:

$$H^2 = -2\frac{e^{2\beta}\psi_u\psi_v}{L^2 e^{2\lambda}}. \qquad (8)$$

Таким образом, должно быть: $\psi_u\psi_v < 0$. Выберем:

$$\psi_u < 0;\ \psi_v > 0,$$

такому выбору соответствует положительное направление магнитного поля: $n^2 > 0$.

Тогда условия вмороженности (4) с учетом соотношения нормировки вектора скорости дает для ненулевых компонент этого вектора:

$$v_v = e^{\lambda}\sqrt{-\frac{\psi_v}{\psi_u}};\quad v_u = e^{\lambda}\sqrt{-\frac{\psi_u}{\psi_v}}. \qquad (9)$$

С учетом этих соотношений и (6) выпишем нетривиальные уравнения Эйнштейна:

$$\begin{aligned}
&L_{uu} + L\,\beta_u{}^2 - 2\,\lambda_u\,L_u = \kappa\,L\,e^{2\lambda}\psi_u(\varepsilon+p+H^2/4\pi)/4\psi_v;\\
&L_{vv} + L\,\beta_v{}^2 - 2\,\lambda_v\,L_v = \kappa\,L\,e^{2\lambda}\psi_v(\varepsilon+p+H^2/4\pi)/4\psi_u;\\
&L_{uv} + L\,\beta_u\,\beta_v + L\,\lambda_{uv} = -\,\kappa\,L\,e^{2\lambda}p/2; \qquad (10)\\
&(L^2)_{uv} = \kappa\,L^2 e^{2\lambda}(\varepsilon-p)/2;\\
&\beta_{uv} + (L_u\,\beta_v + L_v\,\beta_u)/L, = \kappa\,e^{2\lambda}H^2/16\pi.
\end{aligned}$$

Уравнения (10) совместно с определением H^2 (8) и локальным уравнением состояния плазмы $p = p(\varepsilon)$ представляют полную систему уравнений относительно пяти неизвестных скалярных функций: λ, β, L, ψ, ε. Заметим, что вследствие последнего из уравнений (10):

β=const H^2 = 0.

Именно это свойство ставит под вопрос корректность модели энергобаланса, использованную в [1], [2] для учета обратного влияния GMSW на метрику гравитационной волны.

Если в (10) положить все функции зависящими лишь от одной переменной t, мы получим однородную анизотропную модель Вселенной с магнитным полем. Если положить все функции зависящими лишь от переменной x, получим статическую модель плоского анизотропного слоя. В вакууме система (10) допускает также запаздывающее решение (все функции зависят лишь от переменной u), либо опережающее решение (все функции зависят лишь от переменной v), называемых плоскими гравитационными волнами. В этих случаях из системы (10) остается одно нетривиальное уравнение на три метрические функции, что дает возможность выбрать, например:

$\lambda(u) = 0,$

а функцию $\beta(u)$ - амплитуду ПГВ сохранить произвольной. Тогда на фоновый фактор ПГВ, т.е. на $L(u)$, получим уравнение (см. [6]):

$L_{uu} + \beta_u^{\,2} L = 0.$

4. Статическое решение

Полагая в отсутствие гравитационной волны $\psi = \psi(x)$, сразу получим $\psi_{\rm u} = -\psi_{\rm v}$, и согласно (9) $v_u = v_v \quad v^1 = 0$, т.е. плазма покоится. Для статической метрики первые два уравнения (10) совпадают, независимые уравнения Эйнштейна принимают вид:

$$L'' + L\beta'^{2} - 2\lambda' L' = -\kappa L e^{2\lambda}(\varepsilon + p + H^2/4\pi)/2;$$

$$L'' + L\beta'^{2} + \lambda'' L = \kappa L e^{2\lambda} p; \qquad (11)$$

$(L^2)'' = -\kappa L^2 e^{2\lambda}(\varepsilon - p);$

$\beta'' + 2\beta' L'/L, = \kappa e^{2\lambda} H^2/16\pi.$

Из четырех уравнений (11) два уравнения являются определениями ε и H^2. Таким образом, на три метрические функции λ, β и L имеется всего два уравнения, что дает возможность наложить на эти функции одно дополнительное условие, определяющее класс решений.

Из системы (11), произведя тождественные преобразования, получим следствие, которое с вводом новой переменной $\nu = \beta - \lambda$ можно записать в виде: $L'' + L\beta'^2 + L\lambda'' = -[L^2\nu' - (L^2)' \backslash 2]'/2L.$ (12)

С помощью (12) уравнения (11) могут быть приведены к более удобному виду:

$$[L^2\nu' + (L^2)'/2]' = -2\kappa L^2 e^{2\lambda} p; \tag{13}$$

$$(L^2)'' = -\kappa L^2 e^{2\lambda}(\varepsilon - p); \tag{14}$$

$$(\beta' L^2)' = -\kappa L^2 e^{2\lambda} H^2/16\pi. \tag{15}$$

Если взять в качестве локального уравнения состояния плазмы баротропное уравнение $p = k\varepsilon;$ $(0 < k < 1)$, то из (13), (14) получим алгебраическое следствие:

$$[(1-k)L^2\nu' - (1+3k)(L^2)'/2]' = 0,$$

из которого найдем первый интеграл:

$$L^2\nu' = C_1 + (1+3k)(L^2)'/(2(1-k)), \tag{16}$$

где $C_1 = Const.$

Вследствие (16) справедливы, например, соотношения:

$$[L^2\nu' - (L^2)'/2]' = 2k(L^2)''/(1-k);$$

$$[L^2\nu' + (L^2)'/2]' = (1+k)(L^2)''/(1-k),$$

с помощью которых определения плотности энергии плазмы (14) и магнитного поля (15) могут быть записаны в более симметричном виде:

$$\kappa\varepsilon = -2e^{-2\lambda}(L^2\nu')'/[(1+3k)L^2]; \tag{17}$$

$$\kappa H^2 / (8\pi) = -2\, e^{-2\lambda} (L^2 \beta')' / L^2.$$

Вследствие неотрицательности функций ε и H^2 решение уравнений Эйнштейна должно удовлетворять условиям:

$$(L^2 \nu')' \quad 0 \qquad\qquad (L^2 \beta')' \quad 0. \tag{18}$$

Использование интеграла (16) позволяет записать первое из условий (18) в более компактной форме: $(L^2)'' \quad 0.$

Таким образом, найдем локальное значение введенного в [1] параметра $\alpha^2(x)$:

$$\alpha^2 = H^2 / [4\pi\, (\varepsilon + p)] = 2\, (1+3k)\, (L^2 \beta')' / [(1+k)\, (L^2 \nu')']. \tag{19}$$

В случае баротропного уравнения состояния система уравнений Эйнштейна сводится к двум независимым нелинейным дифференциальным уравнениям на три метрические функции, одно из которых, (16), первого порядка, а второе, (12), – второго. На эти три функции можно наложить одно дополнительное условие, не противоречащее (18). Выбирая в интеграле (16): $C_1 = 0,$

получим частное решение: $\nu = (1 + 3k) \ln L / (1 - k).$ (20)

Пользуясь свободой в выборе дополнительного условия на метрические функции, мы можем, например, положить в (19):

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 = const.$$

Положив $\alpha_0^2 \quad 0$, из (19) получим еще один первый интеграл:

$L^2 \nu' = 2\, (1+3\mathrm{k})\, L^2 \beta' / [\alpha_0^2\, (1+\mathrm{k})] + C_2$, где $C_2 = \mathrm{const}$. Выбирая и здесь $C_2 = 0$, получим:

$$\beta = \alpha_0^2\, (1 + k) \ln L / [2(1 - k)]. \tag{21}$$

Запишем интегралы (20) и (21) в виде

$\nu = q_1 \ln L,$ *где* $q_1 = q_1(k) = (1 + 3k) / (1 - k);$

$\beta = q_2 \ln L,$ *где* $q_2 = q_2(k, \alpha_0) = \alpha_0^2\, (1 + k) / (2\, (1 - k)).$

Подставляя эти интегралы в оставшееся уравнение (12), получаем замкнутое относительно функции L уравнение:

$$L'' L = q_3 L'^2,$$

где

$$q_3 = q_3\,(k, \alpha_0) = \frac{(1\text{-}3q_1 + 2q_2\text{-}2q_2^2)}{1 + 2q_2 - q_1}.$$

Решая его, получим:

$$L = (\mu_1(v)\,u\,(1+q_3) + \mu_2(v))^{\frac{1}{(1+q_3)}}, \qquad (22)$$

где $\mu_1\,(v)$, $\mu_2\,(v)$ – произвольные функции, вид которых определим из условия статичности решения:

$\psi = \psi\,(x) = \psi\,(v\text{-}u)$, откуда следует:

$$\mu_1(v) = -\frac{A}{\sqrt{2(1+q_3)}} = const;$$

$$\mu_2(v) = \frac{A}{\sqrt{2}}v + B.$$

При переходе от переменной v к переменной x, согласно (2), выражение (21) примет вид:

$$L = (A\,x + B)^{q_4}, \qquad (23)$$

где

$$q_4 = q_4\,(k, \alpha_0) = \frac{1}{1+q_3}.$$

Полагая $B = 1$, получим условие на функцию L:

$L(0) = 1$,

а решение (22) примет вид:

$$L = (A\,x + 1)^{q_4}.$$

Подставляя полученное решение в (17), (19) и (20), имеем

$$\lambda = q_4 (q_2 - q_1) \ln(Ax + 1); \tag{24}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (Ax+1)^{q_5}, \tag{25}$$

где $\varepsilon_0 = \dfrac{2A^2 q_1 q_4 (1-2q_4)}{\kappa(1+3k)}$;

$$q_5 = q_5 (k, \alpha_0) = -2q_4 (q_2 - q_1) - 2; \tag{26}$$

$$H^2 = H_0^2 (Ax + 1)^{q_5}, \tag{27}$$

где $H_0^2 = \dfrac{16\pi A^2 q_2 q_4 (1-2q_4)}{\kappa}$;

$$\nu = q_1 q_4 \ln(Ax+1); \tag{28}$$

$$\beta = q_2 q_4 \ln(Ax + 1). \tag{29}$$

При этом метрика (1) примет вид

$$ds^2 = (Ax^1+1)^{2q_4(q_2-q_1)} [(dx^4)^2 - (dx^1)^2] -$$

$$-[(Ax^1+1)^{2q_4(1+q_2)}(dx^2)^2 + (Ax^1+1)^{2q_4(1-q_2)}(dx^3)^2]. \tag{30}$$

Константу A легко получить из (27):

$$A^2 = \frac{H_0^2 \kappa}{16\pi q_2 q_4 (1-2q_4)}.$$

Для метрики (30) получим следующие ненулевые компоненты тензора Римана

$$R_{2323} = -q_4^2 (q_2^2 - 1) A^2 (Ax^1+1)^{q_5+4q_4};$$

$$R_{3434} = q_4^2 (q_2 - q_1)(q_2 - 1) A^2 (Ax^1+1)^{-2-2q_4(q_2-1)};$$

$$R_{1313} = q_4 (q_2 - 1) A^2 (q_4(2q_2 - q_1 - 1) + 1)(Ax^1+1)^{-2q_4(q_2-1)-2};$$

$$R_{1212} = q_4 (1+q_2) A^2 (q_4 + q_4 q_1 - 1)(Ax^1+1)^{2q_4(q_2+1)-2};$$

$$R_{2424} = -q_4^2(q_2 - q_1)\, A^2(1+q_2)(Ax^1+1)^{2q_4(q_2+1)-2};$$

$$R_{1414} = q_4(q_2 - q_1)\, A^2(Ax^1+1)^{q_5}.$$

В пределе $\alpha_0 \to \infty$, из вышеприведенной функции следует:

$$q_2 = \infty, \quad q_3 = \infty, \quad q_4 = 0, \quad q_5 = 0,$$

а метрика (30) приводится к виду:

$$ds^2 = (Ax^1+1)^{-2}[(dx^4)^2 - (dx^1)^2] - [(A\,x^1+1)^{-2}(dx^2)^2 + (Ax^1+1)^2(dx^3)^2]$$

Таким образом, получен ряд точных плоскосимметрических решений самосогласованных уравнений Эйнштейна - Максвелла для релятивистской магнитоактивной плазмы. Исследование этих решений будет проведено в следующей статье.

Литература

[1] Ignat'ev Yu.G. Gravitation & Cosmology, Vol.1, 1995, No 4, 287.

[2] Ignat'ev Yu.G. Gravitation & Cosmology, Vol.2, 1996, No 4, 213.

[3] Ignat'ev Yu.G. Phys. Letters, A, 1997.

[4] Норден А.П. Дифференциальная геометрия. М, 1948.

[5] Synge J.L. Relativity: The General Theory. Amsterdam, 1963.

[6] Misner C.W., Torn K.S., Wheeler J.A. Gravitation. San Francisco, 1973.I