Г.З. Хабибуллина

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть E_3^+ - полупространство $x_3>0$ трёхмерного евклидова пространства E_3 точек $x=(x_1,x_2,x_3)$, D – симметричная относительно плоскости $x_3=0$ конечная область в E_3, ограниченная поверхностью Г, $D^+=E_3^+\bigcap D,\ \Gamma^+=E_3^+\bigcap\Gamma,\ \tilde{D}^+=D^+\bigcup\Gamma^+,\ D_e^+=E_3^+\setminus\tilde{D}^+,\ \tilde{D}_e^+=E_3^+\setminus D^+.$

В данной работе доказывается существование единственного решения основных краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения

$$TU=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)=0 \tag{1}$$

в областях D^+ и D_e^+.

В первом параграфе вводится понятие Т-гармонической функции. Во втором параграфе даются постановки основных краевых задач для уравнения (1) и доказывается единственность их решения. В третьем параграфе строятся потенциалы и изучаются их свойства.

В четвёртом параграфе основные краевые задачи для уравнения (1) редуцируются к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость.

§1. Т-гармонические функции

1.1. Фундаментальное решение. Обозначим через $C_0^n\left(D^+\right)$ множество n раз непрерывно дифференцируемых в D^+ и стремящихся к нулю при $x \to 0$ функций.

Методом разделения переменных можно доказать, что любое ограниченное решение уравнения (1) в области D^+ стремится к нулю при $x_3 \to 0$.

С помощью замены переменных по формулам $\xi_i = x_i, i = 1, 2,$ $\xi_3 = \ln x_3$ уравнение (1) сводится к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} = 0, \tag{2}$$

а область D^+ переходит в бесконечную область G.

Если $u = \varphi\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)$ - гармоническая функция в области G, то функция $u = \varphi\left(x_1, x_2, \ln x_3\right)$ будет решением уравнения (1) в области D^+.

Известно [1], что функция $w(\xi, \xi_0) = \dfrac{1}{\left|S_{\xi_0 1}\right| r_{\xi\xi_0}}$, где $\left|S_{\xi_0 1}\right| = 4\pi$ - площадь сферы единичного радиуса, $r_{\xi\xi_0} = \sqrt{\left(\xi_1 - \xi_{10}\right)^2 + \left(\xi_2 - \xi_{20}\right)^2 + \left(\xi_3 - \xi_{30}\right)^2}$, является фундаментальным решением уравнения Лапласа (2) с особенностью в точке ξ_0

Возвращаясь к старым переменным получаем фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точке x_0. Оно имеет вид

$$w(x,x_0)=\frac{1}{|\Sigma_1|\rho_{xx_0}},$$

где $|\Sigma_1|$ - площадь поверхности $\rho_{xx_0}=1$, $\rho_{xx_0}=\sqrt{(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+\ln^2\frac{x_3}{x_{30}}}$.

Определение. Функция $u(x)$ называется Т-гармонической функцией в области D^+, если она удовлетворяет условиям:

a) $u\in C_0^2(D^+)$,

b) $Tu=0$ в D^+.

Множество всех Т-гармонических в D^+, непрерывных в $\tilde{D}^+$ функций обозначим через $T(\tilde{D}^+)$.

1.2. Формулы Грина. Для функций $u,v\in C_0^2(D^+)\cap C_0^1(\tilde{D}^+)$ имеют место формулы

$$\iiint_{D^+} vTux_3^{-1}dx+\iiint_{D^+}\left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+x_3^2\frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]x_3^{-1}dx=\iint_{\Gamma^+} vA[u]\,d\Gamma, \qquad (3)$$

где $A[u]=\frac{\cos(n,\xi_1)}{\xi_3}\frac{\partial u}{\partial\xi_1}+\frac{\cos(n,\xi_2)}{\xi_3}\frac{\partial u}{\partial\xi_2}+\xi_3\cos(n,\xi_3)\frac{\partial u}{\partial\xi_3}$ - конормаль к границе Γ^+ в точке $\xi\in\Gamma^+$, и

$$\iiint_{D^+}[vTu-uTv]x_3^{-1}dx=\iint_{\Gamma^+}\{vA[u]-uA[v]\}\,d\Gamma. \qquad (4)$$

Формула (3) называется первой формулой Грина, формула (4) – второй формулой Грина для оператора Т.

1.3. Интегральное представление Т-гармонической функции. Для функции $u(x) \in T(\tilde{D}^+) \cap C^1(\tilde{D}^+)$ при $x_0 \in D^+$ имеет место следующее интегральное представление

$$u(x_0) = \iint_{\Gamma^+} \left(\frac{1}{|\Sigma_1| \rho_{\xi x_0}} A[u] - uA\left[\frac{1}{|\Sigma_1| \rho_{\xi x_0}} \right] \right) d\Sigma_R. \tag{5}$$

§2. Основные краевые задачи и единственность их решения

2.1. Внутренняя задача типа Дирихле. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u \in T(\tilde{D}^+); \tag{6}$$

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(\xi). \tag{7}$$

Теорема 1. Внутренняя задача типа Дирихле не может иметь более одного решения.

2.2. Внешняя задача типа Дирихле. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u \in T(\tilde{D}_e^+); \tag{8}$$

$$u = 0(|x|^{-1}) \text{ при } |x| \to \infty; \tag{9}$$

$$u|_{\Gamma^+} = \psi(\xi). \tag{10}$$

Теорема 2. Внешняя задача типа Дирихле не может иметь более одного решения.

2.3. Внутренняя задача типа Неймана. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in T(\tilde{D}^+) \cap C^1(\tilde{D}^+); \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right|_{\Gamma^+} = g(\xi). \tag{12}$$

Теорема 3. Внутренняя задача типа Неймана не может иметь более одного решения.

2.4. Внешняя задача типа Неймана. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in T\left(\tilde{D}_e^+\right) \cap C^1\left(\tilde{D}_e^+\right); \tag{13}$$

$$u = 0\left(|x|^{-1}\right) \text{ при } |x| \to \infty; \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right|_{\Gamma^+} = f(\xi).$$

Теорема 4. Внешняя задача типа Неймана не может иметь более одного решения.

§3. Т-гармонические потенциалы типа простого и двойного слоёв и их свойства

3.1. Т-гармонические потенциалы. Полагая в формуле (5) $x_0 = x$, $A[u] = \mu(\xi)$, $-u = \upsilon(\xi)$, получаем

$$u(x) = \iint_{\Gamma^+} \mu(\xi) \frac{1}{|\Sigma_1| \rho_{\xi x}} d\Gamma + \iint_{\Gamma^+} \upsilon(\xi) A\left[\frac{1}{|\Sigma_1| \rho_{\xi x}}\right] d\Gamma.$$

Отсюда следует, что любая Т-гармоническая функция в области D^+ может быть представлена в виде суммы двух интегральных операторов вида:

$$v(x) = \iint_{\Gamma^+} \mu(\xi) \frac{1}{|\Sigma_1| \rho_{\xi x}} d\Gamma, \tag{16}$$

$$w(x) = \iint_{\Gamma^+} \upsilon(\xi) A\left[\frac{1}{|\Sigma_1| \rho_{\xi x}}\right] d\Gamma. \tag{17}$$

Интегральный оператор $v(x)$ называется потенциалом типа простого слоя с плотностью $\mu(\xi)$ и ядром $\frac{1}{|\Sigma_1|\rho_{\xi x}}$, а интегральный оператор $w(x)$ - потенциалом типа двойного слоя с плотностью $\upsilon(\xi)$ и ядром $A\left[\frac{1}{|\Sigma_1|\rho_{\xi x}}\right]$.

3.2. Аналог формулы Гаусса. Если граница Г области D является поверхностью Ляпунова, то имеет место аналог формулы Гаусса

$$\iint_{\Gamma^+} A\left[\frac{1}{|\Sigma_1|\rho_{\xi x_0}}\right] d\Gamma = \begin{cases} -1, \ x_0 \in D^+; \\ -\frac{1}{2}, \ x_0 \in \Gamma^+; \\ 0, \ x_0 \in D_e^+. \end{cases}$$

3.3. Формулы скачка для потенциала типа двойного слоя. Нетрудно доказать, что потенциал типа двойного слоя в некоторой точке ξ_0, лежащей на поверхности Γ^+, является разрывной функцией, для которой имеет место предельные соотношения

$$w_B(\xi_0) = w(\xi_0) - \frac{1}{2}\upsilon(\xi_0), \quad w_H(\xi_0) = w(\xi_0) + \frac{1}{2}\upsilon(\xi_0), \tag{18}$$

где $w_B(\xi_0)$ - предельное значение потенциала типа двойного слоя при подходе к точке ξ_0 с внутренней стороны, $w_H(\xi_0)$ – предельное значение с наружной стороны поверхности, а $w(\xi_0)$ - прямое значение потенциала типа двойного слоя.

3.4. Формулы скачка для конормальной производной потенциала типа простого слоя. В отличие от потенциала типа двойного слоя потенциал типа простого слоя (16) непрерывен в точках поверхности Γ^+.

Исследуя разрывы внутренней конормальной производной потенциала типа простого слоя в точке $\xi_0 \in \Gamma^+$, получаем следующие предельные соотношения

$$\left(A[\nu]\right)_B = \left(A[\nu]\right)_0 + \frac{1}{2}\mu(\xi_0), \quad \left(A[\nu]\right)_H = \left(A[\nu]\right)_0 - \frac{1}{2}\mu(\xi_0).$$

Исследование разрывов внешней конормальной производной приводит нас к следующим предельным соотношениям

$$\left(A[\nu]\right)_B = \left(A[\nu]\right)_0 - \frac{1}{2}\mu(\xi_0), \ \left(A[\nu]\right)_H = \left(A[\nu]\right)_0 + \frac{1}{2}\mu(\xi_0).$$

§4. Редукция основных краевых задач к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

Сведём основные краевые задачи к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

Решение внутренней задачи типа Дирихле (6) – (7) будем искать в виде потенциала типа двойного слоя (17).

При любом выборе $\upsilon(\xi)$ функция $w(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри Γ^+. Функция $w(x)$ разрывна на Γ^+. Для выполнения граничного условия, очевидно, надо, чтобы $w_B(\xi_0) = \varphi(\xi_0)$.

Принимая во внимание формулы (18), получаем уравнение для определения функции $\upsilon(\xi)$

$$-\frac{1}{2}\upsilon(\xi_0) + \iint\limits_{\Gamma^+} \upsilon(\xi) A_\xi \left[\frac{1}{\left|\sum_1\right| \rho_{\xi\xi_0}}\right] d\Gamma = \varphi(\xi_0). \tag{19}$$

Уравнение (19) называется интегральным уравнением внутренней задачи типа Дирихле.

Для внешней задачи типа Дирихле (8) – (10) получается аналогичное уравнение

$$\frac{1}{2}\upsilon(\xi_0) + \iint\limits_{\Gamma^+} \upsilon(\xi) A_\xi \left[\frac{1}{\left|\sum_1\right| \rho_{\xi\xi_0}}\right] d\Gamma = \psi(\xi_0). \tag{20}$$

Уравнение (20) называется интегральным уравнением внешней задачи типа Дирихле.

Каждое из уравнений (19), (20) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода с квазирегулярным ядром.

Для второй краевой задачи получаются уравнения

$$\frac{1}{2}\mu(\xi_0)+\iint\limits_{\Gamma^+}\mu(\xi)A_{\xi_0}\left[\frac{1}{\left|\sum_1\right|\rho_{\xi\xi_0}}\right]d\Gamma=g(\xi_0), \tag{21}$$

$$-\frac{1}{2}\mu(\xi_0)+\iint\limits_{\Gamma^+}\mu(\xi)A_{\xi_0}\left[\frac{1}{\left|\sum_1\right|\rho_{\xi\xi_0}}\right]d\Gamma=f(\xi_0), \tag{22}$$

если её решение искать в виде потенциала типа простого слоя (16).

Уравнение (21) называется интегральным уравнением внутренней задачи типа Неймана (11) – (12), уравнение (22) – интегральным уравнением внешней задачи типа Неймана (13) – (15).

Каждое из этих интегральных уравнений является интегральным уравнением Фредгольма второго рода с квазирегулярным ядром.

Уравнения (19) и (22), а также уравнения (20) и (21) попарно сопряженные. Докажем, что интегральное уравнение (22), соответствующее внешней задаче типа Неймана, разрешимо и притом единственным образом. С этой целью рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$\mu_0(\xi_0)-2\iint\limits_{\Gamma^+}\mu_0(\xi)A_{\xi_0}\left[\frac{1}{\left|\sum_1\right|\rho_{\xi\xi_0}}\right]d\Gamma=0. \tag{23}$$

Пусть μ_0 - какое-нибудь ненулевое решение этого уравнения и эта функция непрерывна на Γ^+. Тогда потенциал типа простого слоя

$$V_0(x)=\iint\limits_{\Gamma^+}\mu_0(\xi)\frac{1}{\left|\sum_1\right|\rho_{\xi\xi_0}}d\Gamma$$

имеет конормальную производную извне Γ^+, а равенство (23) означает, что эта конормальная производная равна нулю

$$A\left[V_0(x)\right]_e \equiv 0. \tag{24}$$

По теореме единственности для внешней задачи типа Неймана

$$V_0(x) \equiv 0, \ \ x \in D_e^+. \tag{25}$$

Так как потенциал типа простого слоя является непрерывной функцией во всем пространстве, то на Γ^+.

$$V_0(x) \equiv 0. \tag{26}$$

Рассмотрим потенциал $V_0(x)$ в области D^+. В этой области функция $V_0(x)$ Т-гармонична, и согласно соотношению (26), обращается в нуль на границе области. По теореме единственности для внутренней задачи типа Дирихле

$$V_0(x) \equiv 0, \qquad x \in D^+. \tag{27}$$

Но тогда $A\left[V_0(x)\right]_i \equiv 0$ в D^+. Сопоставляя (27) с (24) получим, что $\mu_0(x) \equiv 0$.

Однородное интегральное уравнение (23) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма интегральное уравнение внешней задачи типа Неймана (22) разрешимо, и притом единственным образом, для любой непрерывной функции $f(\xi_0)$.

Литература

[1] Мухлисов Ф. Г., Нигмедзянова А. М. Об основных свойствах решения одного вырождающегося эллиптического уравнения. // Матем. моделирование и краевые задачи. Тр. 12-й межвуз. конф. Ч. 3. Самара; 2002. С. 103 – 106.