Ф.Г.Мухлисов, А.Ш.Хисматуллин

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть D – симметричная относительно оси Ox конечная область, Г – её граница. Обозначим через D^+ и $Г^+$ части D и Г в полуплоскости $y > 0$. Область D^+ ограничена кривой $Г^+$ и отрезком [a,b] оси Ox; A(a,0), B(b,0).

В области D^+ рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение с оператором Бесселя вида

$$L(u) = y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_y u = 0, \tag{L}$$

где $B_y u = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}$ – оператор Бесселя, $m > 0$, $0 < k < 1$ – постоянные.

В данной работе доказывается существование единственного решения некоторых краевых задач для уравнения (L). В §1 выводятся формулы Грина для оператора L. В §2 строятся фундаментальные решения уравнения (L) и дается интегральное представление решения уравнения (L). В §3 изучаются основные свойства решений уравнения (L) и, в частности, принцип максимума. В §4 дается постановка краевых задач для уравнения (L) и доказывается единственность их решения. В §5 вводятся потенциалы типа простого и двойного слоев для уравнения (L) и изучаются их свойства. В §6 краевые задачи для уравнения (L) сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

§1. Формулы Грина

Пусть $u,v\in C^2\left(D^+\right)\cap C^1\left(\bar{D}^+\right)$. Непосредственным вычислением можно доказать, что имеет место тождество

$$vL(u)\,y^k+\left(y^m\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)y^k=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{m+k}v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^k v\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Интегрируя обе части этого тождества по области D^+ и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\iint\limits_{D^+}vL(u)\,y^k\,dxdy+\iint\limits_{D^+}\left(y^m\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)y^k\,dxdy=\int\limits_{\Gamma^+}vA[u]\,y^k\,d\Gamma\,, \qquad (1.1)$$

где $A[u]=y^m\cos(n,x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\cos(n,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}$ – конормальная производная, n – внешняя нормаль к кривой Γ^+.

Заменяя в формуле (1.1) местами u и v, получаем

$$\iint\limits_{D^+}uL(v)\,y^k\,dxdy+\iint\limits_{D^+}\left(y^m\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)y^k\,dxdy=\int\limits_{\Gamma^+}uA[v]\,y^k\,d\Gamma\,. \qquad (1.2)$$

Вычитая из (1.1) формулу (1.2), получаем

$$\iint\limits_{D^+}\left[vL(u)-uL(v)\right]y^k\,dxdy=\int\limits_{\Gamma^+}\left(vA[u]-uA[v]\right)y^k\,d\Gamma\,. \qquad (1.3)$$

Формулы (1.1) и (1.3) называются соответственно первой и второй формулами Грина для оператора L.

Если u и v суть решения уравнения (L), то из формулы (1.3) имеем

$$\int\limits_{\Gamma^+}\left(vA[u]-uA[v]\right)y^k\,d\Gamma=0\,. \qquad (1.4)$$

Если u = v и u(x,y) – решение уравнения (L), то формула (1.1) принимает вид:

$$\iint\limits_{D^+}\left(y^m\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)y^k\,dxdy=\int\limits_{\Gamma^+}uA[u]\,y^k\,d\Gamma\,.$$

§2. Фундаментальные решения и интегральное представление решения уравнения (L)

С помощью замены переменных по формулам

$$\xi = x, \eta = \left(\frac{1}{1-k}\right)^{\frac{2(1-k)}{m+2}} y^{1-k}, \tag{2.1}$$

приводим уравнение (1) к виду

$$\eta^{\frac{2(1-k)}{m+2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \tag{2.2}$$

Известно [1], что фундаментальные решения уравнения (2.2) имеют вид:

$$q_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = k_1\left(\rho_1^2\right)^{-\beta} F(\beta,\beta,2\beta;1-\omega), \tag{2.3}$$

$$q_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = k_2\left(\frac{4(1-k)}{m+2}\right)^{4\beta-2} \left(\rho_1^2\right)^{-\beta} (1-\omega)^{1-2\beta} F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-\omega), \tag{2.4}$$

где k_1 и k_2 – некоторые константы, $F(a,b,c,\tau)$ – гипергеометрическая функция, $\beta = \frac{m+2k}{2(m+2)}$, $\omega = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$,

$$\rho^2 = (\xi-\xi_0)^2 + \frac{4(1-k)^2}{(m+2)^2}\left(\eta^{\frac{m+2}{2(1-k)}} - \eta_0^{\frac{m+2}{2(1-k)}}\right)^2,$$

$$\rho_1^2 = (\xi-\xi_0)^2 + \frac{4(1-k)^2}{(m+2)^2}\left(\eta^{\frac{m+2}{2(1-k)}} + \eta_0^{\frac{m+2}{2(1-k)}}\right)^2.$$

Переходя к старым переменным x и y, получаем фундаментальные решения уравнения.

$$\varepsilon_1(x,y;x_0,y_0) = k_1\left(r_1^2\right)^{-\beta} F(\beta,\beta,2\beta;1-\sigma), \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_2(x,y;x_0,y_0) = k_2\left(\frac{4(1-k)}{m+2}\right)^{4\beta-2} \left(r_1^2\right)^{-\beta} (1-\sigma)^{1-2\beta} F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-\sigma), \tag{2.6}$$

где $\sigma = \frac{r^2}{r_1^2}$,

$$r^2=(x-x_0)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}-y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$r_1^2=(x-x_0)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}+y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2.$$

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4(1-k)}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},$$

$$k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4(1-k)}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}.$$

Известно [1], что для гипергеометрической функции имеет место формула

$$F(a,b,a+b;1-\sigma)=-\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(a,b,1;\sigma)\ln\sigma+\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)}{(j!)^2}\times$$

$$\times\left[2\frac{\Gamma'(1+j)}{\Gamma(1+j)}-\frac{\Gamma'(a+j)}{\Gamma(a+j)}-\frac{\Gamma'(b+j)}{\Gamma(b+j)}\right]\sigma^j. \qquad (2.7)$$

Поэтому фундаментальные решения (2.5) и (2.6) имеют в точке *(x_0, y_0)* логарифмическую особенность.

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{y\to 0}y^k\frac{\partial\varepsilon_1(x,y;x_0,y_0)}{\partial y}=0, \qquad (2.8)$$

$$\lim_{y\to 0}\varepsilon_2(x,y;x_0,y_0)=0. \qquad (2.9)$$

Пусть функция $u\in C^1\left(\bar{D}^+\right)$ является решением уравнения (L) и $M(x_0,y_0)\in D^+$. Рассмотрим овал $C_{M_0\varepsilon}$, определяемый уравнением $r^2=\varepsilon^2$. Обозначим через D_ε^+ область, ограниченную отрезком [a,b] оси Ох кривой Γ^+ и овалом $C_{M_0\varepsilon}$.

В области D_ε^+ функции $\varepsilon_1(x,y;x_0,y_0)$ и $\varepsilon_2(x,y;x_0,y_0)$ являются решениями уравнения (L) и согласно (1.4), имеют место формулы

$$\int_{\Gamma^+}\Big(\varepsilon_1(\xi,\eta;x_0,y_0)A[u]-uA\big[\varepsilon_1(\xi,\eta;x_0,y_0)\big]\Big)\eta^k d\Gamma =$$

$$=\int_{C_{M_0\varepsilon}}\Big(uA\big[\varepsilon_1(\xi,\eta;x_0,y_0)\big]-\varepsilon_1(\xi,\eta;x_0,y_0)A[u]\Big)\eta^k dC_\varepsilon,$$

$$\int_{\Gamma^+}\Big(\varepsilon_2(\xi,\eta;x_0,y_0)A[u]-uA\big[\varepsilon_2(\xi,\eta;x_0,y_0)\big]\Big)\eta^k d\Gamma =$$

$$=\int_{C_{M_0\varepsilon}}\Big(uA\big[\varepsilon_2(\xi,\eta;x_0,y_0)\big]-\varepsilon_2(\xi,\eta;x_0,y_0)A[u]\Big)\eta^k dC_\varepsilon.$$

Переходя в этих формулах к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$u(x,y)=\int_{\Gamma^+}\Big(\varepsilon_1(\xi,\eta;x_0,y_0)A[u]-uA\big[\varepsilon_1(\xi,\eta;x_0,y_0)\big]\Big)\eta^k d\Gamma, \quad (2.10)$$

$$u(x,y)=\int_{\Gamma^+}\Big(\varepsilon_2(\xi,\eta;x_0,y_0)A[u]-uA\big[\varepsilon_2(\xi,\eta;x_0,y_0)\big]\Big)\eta^k d\Gamma. \quad (2.11)$$

§3. Свойства решений уравнения (L)

Установим основные свойства решений уравнения (L).

Теорема 1. Интеграл от конормальной производной решения уравнения (L) по кривой Γ^+ равен нулю.

Доказательство. Полагая в формуле (1.1) $v=1$ и $u\in C^1\left(\bar{D}^+\right)$ – решение уравнения (L) в D^+, получаем

$$\int_{\Gamma^+}A[u]y^k d\Gamma=0 \quad (3.1)$$

Пусть C_{M_0R} - овал: $r^2=R^2$, Q_{M_0R} - область, ограниченная этим овалом C_{M_0R}.

Теорема 2. Если функция $u(x,y)\in C\left(\bar{Q}_{M_0R}\right)$ и является решением уравнения (L) в области Q_{M_0R}, то его значение в центре M_0 овала Q_{M_0R} может быть представлено в виде

$$u(M_0)=\frac{1}{C_1R^{1+m+k}}\int\limits_{C_{M_0R}}u\eta^{k+m}dC_{M_0R}-A_1\int\limits_{C_{M_0R}}u\gamma_1(\xi,\eta;x_0,y_0)\eta^k dC_{M_0R},\qquad(3.2)$$

или

$$u(M_0)=\frac{1}{C_2R^{1+m+k}}\int\limits_{C_{M_0R}}u\eta^{k+m}dC_{M_0R}-A_2\int\limits_{C_{M_0R}}u\gamma_2(\xi,\eta;x_0,y_0)\eta^k dC_{M_0R};\qquad(3.3)$$

где C_1 и C_2 – нормирующие константы, A_1 и A_2 - некоторые положительные постоянные; $\gamma_1(\xi,\eta;x_0,y_0)$ и $\gamma_2(\xi,\eta;x_0,y_0)$ - положительные непрерывные функции.

Доказательство. Докажем равенство (3.2), а доказательство (3.3) проводится аналогично.

В силу формулы (2.7) фундаментальное решение (2.5) можно представить в виде:

$$\varepsilon_1(x,y;x_0,y_0)=d\ \ln\frac{1}{r}+\varepsilon_1^*(x,y;x_0,y_0),\qquad(3.4)$$

где d – нормирующая константа, $\varepsilon_1^*(x,y;x_0,y_0)$ – неотрицательная регулярная часть фундаментального решения $\varepsilon_1(x,y;x_0,y_0)$. Обозначим через $Q_{R\delta}$ область, заключенную между овалами C_{M_0R} и $C_{R\delta}$. Применяя формулу (1.4) к функциям $v=\varepsilon_1(x,y;x_0,y_0)$ и $u(x,y)$ в области $Q_{R\delta}$, получаем

$$\int\limits_{C_{M_0R}}\left(\varepsilon_1A[u]-uA[\varepsilon_1]\right)\eta^k dC_{M_0R}+\int\limits_{C_{M_0\delta}}\left(\varepsilon_1A[u]-uA[\varepsilon_1]\right)\eta^k dC_{M_0\delta}=0.$$

Переходя в этой формуле к пределу при $\delta\to 0$ и учитывая формулы (3.1) и (3.4), получаем (3.2)

Теорема 3. Если функция u удовлетворяет условиям:

1) $u \in C\left(\bar{D}^{+}\right)$,

2) $\lim\limits_{y \to 0} u = 0$,

3) $L(u) = 0$ в D^{+},

то она принимает наибольшее положительное и наименьшее отрицательное значение на границе Γ^{+}, если она не равна нулю.

Доказательство. Пусть, напротив, функция достигнет своего положительного наибольшего значения u_0 в некоторой точке $M_0 \in D^{+}$:

$$u_0 = u(M_0) = \max_{M \in \bar{D}^{+}} u(M), \tag{3.5}$$

Докажем, что $u(M) = u_0$ на овале $C_{M_0\rho_0}$.

Если бы в некоторой точке $M^* \in C_{M_0\rho_0}$ было $u(M^*) < u_0$, то по непрерывности неравенство $u(M) < u_0$ имело бы место и в некоторой окрестности точки M*.

Применяя к $C_{M_0\rho_0}$ формулу (3.3), получаем

$$u_0 = \frac{1}{C_1 \rho_0^{1+m+k}} \int\limits_{C_{M_0\rho_0}} u\eta^{k+m} dC_{M_0\rho_0} - A_2 \int\limits_{C_{M_0\rho_0}} u\gamma_2(\xi,\eta;x_0,y_0)\eta^k dC_{M_0\rho_0} <$$

$$< u_0 \frac{1}{C_1 \rho_0^{1+m+k}} \int\limits_{C_{M_0\rho_0}} \eta^{k+m} dC_{M_0\rho_0} = u_0$$

Полученное бессмысленное неравенство доказывает утверждение (3.5). Так как ρ_0 - произвольное число, то $u = u_0$ в $Q_{M_0\rho_0}$. Докажем теперь $u = u_0 = 0$ в области D^{+}. Пусть N – произвольная точка области D^{+}. Соединим точки M_0 и N ломанной l, целиком лежащей в области D^{+}. Пусть M_1 - точка пересечения овала $C_{M_0\rho_0}$ с ломанной l. По доказанному $u(M_1) = u_0$.

Аналогично доказательству, проведенному для области $Q_{M_0\rho_0}$, доказываем, что $u = u_0$ в $Q_{M_1\rho_1} \subset D^+$. Продолжая этот процесс, через конечное число шагов, получим, что ломанная l покроется областями $Q_{M_i\rho_i}$, и точка N окажется внутри одной из этих областей.

По доказанному $u = u_0$ в каждой области $Q_{M_i\rho_i}$ и, следовательно, $u(x) = u_0$.

Так как N – произвольная точка области D^+, то $u(x) = u_0 = const$ в $\bar{D}^+$. Так как $\lim\limits_{y\to 0} u = 0$, то $u \equiv 0$ в D^+.

§4. Краевые задачи для уравнения (L). Теоремы единственности

Задача Д. Найти решение уравнения в области D^+, непрерывное в замкнутой области D^+ и удовлетворяющее граничным условиям:

$$\lim_{y\to 0} u = 0, \tag{4.1}$$

$$u\big|_{\Gamma^+} = \varphi(\xi,\eta). \tag{4.2}$$

Теорема 4. Задача Д для уравнения (L) с граничными условиями (4.1) и (4.2) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Следует из теоремы 3.

Задача N. Найти решение уравнения (L), один раз непрерывно дифференцируемое в $\bar{D}^+$ и удовлетворяющее граничным условиям:

$$\lim_{y\to 0} y^k \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{4.3}$$

$$A[u]\big|_{\Gamma^+} = \psi(\xi,\eta). \tag{4.4}$$

Теорема 3. Решение задачи N для уравнения (L) с граничными условиями (4.3) и (4.4) определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 - два предполагаемых решения задачи типа Неймана. Тогда их разность $\omega = u_1 - u_2$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega \in C^1\left(\bar{D}^+\right)$,

2) $\lim\limits_{y\to 0} y^k \dfrac{\partial\omega}{\partial y} = 0$,

3) $A[\omega]\big|_{\Gamma^+} = 0$,

4) $L(\omega) = 0$ в D^+.

Полагая в формуле (1.1) $u = v = \omega$, получим

$$\iint\limits_{D^+}\left[y^m\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] y^k dxdy = \int\limits_{\Gamma^+} \omega A[\omega]\, y^k d\Gamma = 0,$$

откуда следует, что $\dfrac{\partial\omega}{\partial x} = \dfrac{\partial\omega}{\partial y} = 0,\ x \in D^+$, так что $\omega = u_1 - u_2 = const.$

§5. Потенциалы для уравнения (L)

Полагая в формуле (2.10) $A[u] = \mu_1(\xi,\eta) - u(\xi,\eta) = \nu_1(\xi,\eta)$, а в формуле (2.11) $A[u] = \mu_2(\xi,\eta) - u(\xi,\eta) = \nu_2(\xi,\eta)$ и заменяя в обеих формулах (x_0, y_0) на (x, y), получаем

$$u(x,y) = \int\limits_{\Gamma^+} \mu_1(\xi,\eta)\varepsilon_1(\xi,\eta;x,y)\eta^k d\Gamma + \int\limits_{\Gamma^+} \upsilon_1(\xi,\eta)\, A\left[\varepsilon_1(\xi,\eta;x,y)\right]\eta^k d\Gamma =$$

$$= v^{(1)}(x,y) + w^{(1)}(x,y),$$

$$u(x,y)=\int_{\Gamma^+}\mu_2(\xi,\eta)\varepsilon_2(\xi,\eta;x,y)\eta^k d\Gamma+\int_{\Gamma^+}\upsilon_2(\xi,\eta)A\left[\varepsilon_2(\xi,\eta;x,y)\right]\eta^k d\Gamma=$$
$$=v^{(2)}(x,y)+w^{(2)}(x,y).$$

Интегральные операторы $v^{(1)}(x,y)$ и $w^{(1)}(x,y)$ будем называть N – потенциалами типа соответственно простого и двойного слоев, а интегральные операторы $v^{(2)}(x,y)$ и $w^{(2)}(x,y)$ - Д – потенциалами типа соответственно простого и двойного слоев. Из предельных соотношений (2.8) и (2.9) следует, что

$$\lim_{y\to 0} y^k \frac{\partial v^{(1)}(x,y)}{\partial y}=0,\ \lim_{y\to 0} y^k \frac{\partial w^{(1)}(x,y)}{\partial y}=0 \tag{5.1}$$

$$\lim_{y\to 0} v^{(2)}(x,y)=0,\ \lim_{y\to 0} w^{(2)}(x,y)=0, \tag{5.2}$$

Лемма 1. (Геллерстед)

$$w_1^{(j)}(x,y)=\int_{\Gamma^+}A\left[\varepsilon_j(\xi,\eta;x,y)\right]\eta^k d\Gamma^+=\begin{cases}-1, если(x,y)\in D^+,\\ -1/2, если(x,y)\in\Gamma^+, j=1,2\\ 0, если(x,y)\notin\overline{D}^+,\end{cases} \tag{5.3}$$

Доказательство. Проводится обычным методом с помощью формул Грина.

Предельные значения потенциалов $w_1^{(j)}(x,y), j=1,2,$ на Γ^+ равны их прямым значениям. В точке $(\xi_0,\eta_0)\in\Gamma^+$ ядра потенциалов $v^{(1)}(x,y)$ и $w^{(2)}(x,y)$ имеют такие же особенности, что и их гармонические аналоги, поэтому для предельных значений Д – потенциала $w^{(2)}(x,y)$ и конормальной производной N – потенциала $v^{(1)}(x,y)$ имеют место соотношения, аналогичные соответствующим соотношениям из [2] для логарифмических потенциалов.

Теорема 6. Если плотности μ_1 и υ_1 непрерывные функции и Γ – кривая Ляпунова, то справедливы следующие предельные соотношения

$$A_s\left[v^{(1)}(x,y)\right]_i = \frac{1}{2}\mu_1(s) + \int_0^l \mu_1(t)k_1(t,s)\,dt, \tag{5.4}$$

$$A_s\left[v^{(1)}(x,y)\right]_l = -\frac{1}{2}\mu_1(s) + \int_0^l \mu_1(t)k_1(t,s)\,dt, \tag{5.5}$$

$$w_i^{(2)}(x,y) = -\frac{1}{2}\upsilon_2(s) + \int_0^l \upsilon_2(t)k_2(t,s)\,dt, \tag{5.6}$$

$$w_l^{(2)}(x,y) = \frac{1}{2}\upsilon_2(s) + \int_0^l \upsilon_2(t)k_2(t,s)\,dt, \tag{5.7}$$

где $K_1(t,s) = A_s\left[\varepsilon_1(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))\right]$, $\mu_1(s) = \mu_1(x(s),y(s))$,

$A_s[\ ] \equiv \eta^m \frac{\partial\eta}{\partial s}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial\xi}{\partial s}\frac{\partial}{\partial\eta}$, $\quad \frac{\partial\eta}{\partial s} = \cos(n,\xi)$ $\frac{\partial\xi}{\partial s} = -\cos(n,\eta)$, n – внешняя нормаль к кривой Γ^+.

$$K_2(s,t) = A_t\left[\varepsilon_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))\right], \ \ \upsilon_2(s) = \upsilon_2(x(s),y(s)).$$

Точки $(\xi(t),\eta(t))$ и $(x(s),y(s))$ лежат на кривой Γ^+, s – длина дуги Γ^+, отсчитываемая от точки *B (b,0)*. Доказательство следует из леммы Гельферстеда.

§6. Интегральные уравнения для плотностей

Решение задачи Д ищем в виде

$$u(x,y) = w^{(2)}(x,y) = \int_{\Gamma^+} \upsilon_2(\xi,\eta)\,A\left[\varepsilon_2(\xi,\eta;x,y)\right]\eta^k\,d\Gamma. \tag{6.1}$$

Ясно, что $L(u) = 0$ в D^+ и в силу (5.2) $\lim\limits_{y\to 0} u(x,y) = 0$.

Неизвестную плоскость ν_2 найдём из требования, чтобы функция (6.1) удовлетворяла граничному условию (4.2). Подставляя её в это условие, с учетом предельного соотношения (5.2) получаем

$$\upsilon_2(s)-2\int_0^l \upsilon_2(t)K_2(s,t)\,dt=-2\varphi(s)\,. \tag{6.2}$$

Решение задачи N ищем в виде

$$u(x,y)=v^{(1)}(x,y)=\int_{\Gamma^+}\mu_1(\xi,\eta)\varepsilon_1(\xi,\eta;x,y)\eta^k\,d\Gamma. \tag{6.3}$$

Очевидно, что эта функция есть регулярное решение уравнения (L) и удовлетворяет условию $\lim\limits_{y\to 0} y^k\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

Неизвестную плотность найдём из требования, чтобы функция (6.3) удовлетворяла граничному условию (4.4). Подставляя эту функцию в это граничное условие, с учетом предельного соотношения (5.4) получаем

$$\mu_1(s)+2\int_0^l \mu_1(t)K_1(t,s)\,dt=2\psi(s)\,. \tag{6.4}$$

Доказательство однозначной разрешимости интегральных уравнений (6.2) и (6.4) проводится аналогично доказательству, проведенному в [1].

Литература

[1] Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М., 1966.-

[2] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970