УДК 517.91

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО В-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

© Н.В.Чепанова

В работе рассматривается задача Коши для сингулярного *B*-гиперболического уравнения, доказывается теорема единственности ее решения. Решение задачи строится методом интеграла Фурье-Бесселя.

Пусть R_{n+1} – $(n+1)$-мерное арифметическое пространство точек $(x,t)=(x',x_n,t)$, $x'=(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$, $R_{n+1}^{++}=\{(x,t)\in R_{n+1}: x_n>0, t>0\}$.

В R_{n+1}^{++} рассмотрим сингулярное B-гиперболическое уравнение

$$\square_B U = t^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial t}\right)-a^2\Delta_B U=0, \qquad (0.1)$$

где $\Delta_B=\Delta_{x'}+B_{x_n}$, $\Delta_{x'}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $B_{x_n}=\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\frac{k}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$, $0<\alpha<1$, $k>0$.

В первом пункте данной работы построим общее решение уравнения (0.1). Второй пункт посвящен постановке задачи Коши и теореме единственности ее решения. В третьем пункте построим решение задачи Коши методом интеграла Фурье-Бесселя.

1. Общее решение

Сначала построим частные решения уравнения (0.1).

Частное решение этого уравнения ищем в виде

$$U(x,t)=T(t)e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n,\xi_n), \qquad (1.1)$$

где $(x',\xi')=\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\xi_i$, $j_\nu(\tau)=2^\nu\Gamma(\nu+1)\Im_\nu(\tau)/\tau^\nu$, $\Im_\nu(\tau)$ – функция Бесселя, $\nu=(k-1)/2$. Здесь $T(\tau)$ - пока неопределенная функция, ее найдем из требования, чтобы функция (1.1) удовлетворяла уравнению (0.1). Подставляя ее в это уравнение, получаем

$$t^{-\alpha}\frac{d}{dt}\left(t^{\alpha}\frac{dT}{dt}\right)+a^2|\xi|^2T=0, \qquad (1.2)$$

или

$$t^2T''+\propto tT'+a^2|\xi|^2t^2T=0.$$

В этом уравнении положим

$$T=\left(\frac{\tau}{a|\xi|}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}R(\tau),\ t=\frac{\tau}{a|\xi|}. \qquad (1.3)$$

В результате имеем

$$\tau^2R''+\tau R'+\left(\tau^2-\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2\right)R=0.$$

Это есть уравнение Бесселя. Известно [1], что при $0<\alpha<1$ линейно независимыми частными решениями этого уравнения будут следующие функции $\Im_{\frac{\alpha-1}{2}}(\tau)$ и $\Im_{\frac{1-\alpha}{2}}(\tau)$. Возвращаясь к старым переменным, получаем решения уравнения (1.2): $t^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{\frac{\alpha-1}{2}}(a|\xi|t)$, $t^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{\frac{1-\alpha}{2}}(a|\xi|t)$.

Таким образом, функции

$$U_1(x,t)=t^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{\frac{\alpha-1}{2}}(a|\xi|t)e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n\xi_n),$$

$$U_2(x,t)=t^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{\frac{1-\alpha}{2}}(a|\xi|t)e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n\xi_n)$$

являются частными решениями уравнения (0.1).

Если $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ – произвольные функции из пространства суммируемых с квадратом и весом x_n^k функций $L_{k2}(E_n^+)$, то ясно, что функция

$$U(x,t)=\int_{E_n^+}\Phi(\xi)t^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{\frac{\alpha-1}{2}}(a|\xi|t)e^{i(x',\xi')}\times$$
$$\times j_\nu(x_n,\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi+\int_{E_n^+}\Psi(\xi)t^{\frac{1-\alpha}{2}}\times \qquad (1.4)$$
$$\times\Im_{\frac{1-\alpha}{2}}(a|\xi|t)e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n,\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi$$

также будет решением уравнения (0.1), если интегралы сходятся и можно применить дифференциальный оператор $\square_B$ под знаком интеграла. Так как $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ – произвольные функции, то такое решение можно назвать общим.

2. Задача Коши. Теорема единственности

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (0.1): Найти четное по x_n решение уравнения (0.1) в R_{n+1}^{++}, один раз непрерывно дифференцируемое в $\overline{R_{n+1}^{++}}$ и удовлетворяющее начальным условиям:

$$U\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \left(t^{\alpha}\frac{du}{dt}\right)\bigg|_{t=0} = \Psi(x). \qquad (1.5)$$

Теорема. Задача Коши (0.1), (1.5) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$ - два предполагаемых решения задачи Коши. Тогда их разность $\omega = U_1 - U_2$ удовлетворяет уравнению (0.1) и нулевым начальным условиям

$$\omega\big|_{t=0} = 0,\ \left(t^{\alpha}\frac{d\omega}{dt}\right)\bigg|_{t=0} = 0 \qquad (1.5_0)$$

Решение задачи (0.1), (1.5_0) ищем в виде

$$\omega(x,t) = \int_{E_n^+}\Phi(\xi)t^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{\frac{\alpha-1}{2}}\left(a|\xi|t\right)e^{i(x',\xi')}\times$$
$$\times j_\nu(x_n,\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi + \int_{E_n^+}\Psi(\xi)t^{\frac{1-\alpha}{2}}\times \qquad (1.6)$$
$$\times\Im_{\frac{1-\alpha}{2}}\left(a|\xi|t\right)e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n,\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi.$$

Здесь $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ – пока неопределенные функции. Их найдем из требования, чтобы функция (1.6) удовлетворяла начальным условиям (1.5_0). С этой целью подставим ее в эти начальные условия. С помощью очевидных равенств

$$\left(t^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{\frac{\alpha-1}{2}}\left(a|\xi|t\right)\right)\bigg|_{t=0} = \frac{1}{r\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}\left(\frac{\alpha|\xi|}{2}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}},$$

$$\left(t^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{\frac{\alpha-1}{2}}\left(a|\xi|t\right)\right)\bigg|_{t=0} = 0,$$

получим

$$\int_{E_n^+}\Phi(\xi)|\xi|^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi = 0.$$

В силу теоремы об обращении преобразования Фурье-Бесселя [1] имеем $\Phi(\xi)=0$. Так что решение задачи Коши (1.6) может быть записано в виде

$$\omega(x,t) = \int_{E_n^+}\Psi(\xi)t^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{\frac{1-\alpha}{2}}\left(a|\xi|t\right)e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n,\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi\cdot \qquad (1.7)$$

Теперь функцию (1.7) подставим во второе начальное условие (1.5_0). Для этого вычислим производную по t от функции (1.7). Используя известную формулу дифференцирования бесселевых функций, имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = a\int_{E_n^+}\Psi(\xi)|\xi|t^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{-\frac{1+\alpha}{2}}\left(a|\xi|t\right)e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n,\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi\cdot$$

Умножая это равенство на t^{α}, получаем

$$t^{\alpha}\frac{\partial\omega}{\partial t} = a\int_{E_n^+}\Psi(\xi)|\xi|t^{\frac{1+\alpha}{2}}\Im_{-\frac{1+\alpha}{2}}\left(a|\xi|t\right)e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n,\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi\cdot$$

Отсюда при $t=0$ имеем

$$\int_{E_n^+}\Psi(\xi)|\xi|e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi = 0.$$

Также в силу теоремы об обращении преобразования Фурье-Бесселя, имеем $\Psi(\xi)=0$.

Таким образом, $\Phi(\xi)=\Psi(\xi)=0$ и, следовательно, $\omega=0$ и $U_1=U_2$. Теорема доказана.

3. Построение решения задачи Коши

Решение задачи Коши (0.1), (1.5) ищем в виде (1.4). Произвольные функции ◎ и ◎ найдем из требования, чтобы функция (1.4) удовлетворяла начальным условиям (1.5). Подставляя ее в эти начальные условия, получаем для ◎ и ◎ систему уравнений

$$\int_{E_n^+}\Phi(\xi)|\xi|t^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi =$$
$$= \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\varphi(x),$$
$$\int_{E_n^+}\Psi(\xi)|\xi|t^{\frac{1-\alpha}{2}}e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi =$$
$$= \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\frac{a^{\frac{\alpha-1}{2}}}{2^{\frac{1+\alpha}{2}}}\psi(x)\cdot$$

В силу теоремы об обращении преобразования Фурье-Бесселя решение этой системы определяется формулами

$$\Phi(\xi)|\xi|t^{\frac{\alpha-1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(2\pi)^n 2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}\times$$
$$\times\int_{E_n^+}\varphi(\eta)e^{-i(\xi',\eta')}j_\nu(\eta_n\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\eta = \qquad (1.8)$$
$$= \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\tilde{\varphi}(\xi),$$

$$\Psi(\xi)|\xi|t^{\frac{1-\alpha}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)a^{\frac{\alpha-1}{2}}2^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{(2\pi)^n 2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}\times$$
$$\times\int_{E_n^+}\psi(\eta)e^{-i(\xi',\eta')}j_\nu(\eta_n\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\eta = \qquad (1.9)$$
$$=\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\frac{a^{\frac{\alpha-1}{2}}}{2^{\frac{1+\alpha}{2}}}\tilde{\psi}(\xi).$$

Решая эту систему, получаем

$$\Phi(\xi)=\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}|\xi|^{\frac{1-\alpha}{2}}\tilde{\varphi}(\xi),$$
$$\Psi(\xi)=\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\frac{a^{\frac{\alpha-1}{2}}}{2^{\frac{1+\alpha}{2}}}|\xi|^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\psi}(\xi).$$

Подставляя эти значения $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ в формулу (1.4), имеем

$$U(x,t)=\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_{E_n^+}\tilde{\phi}(\xi)|\xi|^{\frac{1-\alpha}{2}}t^{\frac{1-\alpha}{2}}\times$$
$$\times\Im_{\frac{\alpha-1}{2}}(a|\xi|t)e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi+ \qquad (1.10)$$
$$+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_{E_n^+}\tilde{\psi}(\xi)|\xi|^{\frac{\alpha-1}{2}}t^{\frac{1-\alpha}{2}}\times$$
$$\times\Im_{\frac{1-\alpha}{2}}(a|\xi|t)e^{i(x',\xi')}j_\nu(x_n\xi_n)\xi_n^{2\nu+1}d\xi .$$

Заменяя здесь $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ на их значения из (1.8) и (1.9) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$U(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^n 2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}\times$$
$$\left[\int_{E_n^+}\varphi(\eta)T_x^\eta F_\xi\left[(t|\xi|)^{\frac{1-\alpha}{2}}\Im_{\frac{\alpha-1}{2}}(a|\xi|t)\right]\eta_n^{2\nu+1}d\eta+\right.$$
$$\left.+\int_{E_n^+}\psi(\eta)T_x^\eta F_\xi\left[|\xi|^{\frac{\alpha-1}{2}}t^{\frac{\alpha-1}{2}}\Im_{\frac{1-\alpha}{2}}(a|\xi|t)\right]\eta_n^{2\nu+1}d\eta\right],$$

где T_x^n - оператор обобщенного сдвига, F_ξ - интегральное преобразование Фурье-Бесселя.

* * * * * * * * * *

1. Киприянов И.А., Кононенко В.И. Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1967. Т.3.

SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR A SINGULAR B-HYPERBOLIC EQUATION BY THE FOURIER-BESSEL INTEGRAL METHOD

N.V.Chepanova

In the paper the Cauchy problem for a singular B-hyperbolic is considered. We prove that the problem has a unique solution. The solution is found by the Fourier-Bessel integral method.