Е.А.Уткина

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Речь пойдет о некоторых характеристических задачах для уравнения

$$L(u) \equiv \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}(x,y) D_x^i D_y^j u = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$. При этом $a_{ij} \in C^{i,j}(\overline{D})$, $C^{i,j}$ есть класс непрерывных в $\overline{D}$, вместе с их производными $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s \ (r = 0,..,i; s = 0,..,j)$ функций, $a_{mn} \equiv 1$,

$$D_t^i = \begin{cases} \partial^k \varphi / \partial t^k, \text{при k} = 1,2,.. \\ \text{тождественный оператор при k} = 0 \\ \int\limits_{t_0}^{t} \dfrac{(t-\tau)^{-k-1} \varphi(\tau)}{(-k-1)!} d\tau \end{cases}$$

Этот оператор введен в [1] для более компактной записи формул.

Задача 1. Найти функцию $u \in C^{m,n}(D) \cap C^{m_1,0}(D \cup p) \cap C^{0,(n-1)}(D \cup q)$, являющуюся в D решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$D_x^{m_1}(u(x_0,y)) = \varphi_{m_1}(y),\ m_1 > m;$$

$$D_x^i(u(x_0,y)) = \varphi_i(y)\ (1 \le i \le m-1),$$

$$y \in p = [y_0, y_1],\ \varphi_{m_1}(y),\ \varphi_i(y) \in C^n(p); \tag{2}$$

$$D_y^j(u(x,y_0)) = \psi_j(x)\ (0 \le j \le n-1),$$

$$x \in q = [x_0, x_1],\ \psi_j(x) \in C^m(q).$$

Задача 2. Найти функцию $u \in C^{m,n}(D) \cap C^{(m-1),0}(D \cup p) \cap C^{0,n_1}(D \cup q)$, являющуюся в D решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$D_x^i(u(x_0, y)) = \varphi_i(y)\ (0 \le i \le m-1),\ \varphi_i(y) \in C^n(p);$$

$$D_y^{n_1}(u(x, y_0)) = \psi_{n_1}(x),\ n_1 > n$$

$$D_y^j(u(x, y_0)) = \psi_j(x)\ (1 \le j \le n-1),$$

$$\psi_{n_1}(y), \psi_j(y) \in C^m(q).$$

Задача 3. Найти функцию $u \in C^{m,n}(D) \cap C^{m_1,0}(D \cup p) \cap C^{0,n_1}(D \cup q)$, являющуюся в D решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$D_x^{m_1}(u(x_0, y)) = \varphi_{m_1}(y),\ m_1 > m;\ \ D_x^i(u(x_0, y)) = \varphi_i(y)\ (1 \le i \le m-1),$$

$$\varphi_{m_1}(y),\ \varphi_i(y) \in C^n(p);\ \ D_y^{n_1}(u(x, y_0)) = \psi_{n_1}(x),\ n_1 > n$$

$$D_y^j(u(x, y_0)) = \psi_j(x)\ \ (1 \le j \le n-1),\ \ \psi_{n_1}(y), \psi_j(y) \in C^m(q).$$

Целью данной работы является получение условий на коэффициенты уравнения (1), достаточных для редукции сформулированных задач к задаче Гурса, состоящей в следующем:

Найти в D решение уравнения (1) из класса $u \in C^{m,n}(D) \cap C^{(m-1),0}(D \cup p) \cap C^{0,(n-1)}(D \cup q)$, удовлетворяющую условиям (2) при $m_1 = 0$.

Формула решения этой задачи известна [2]:

$$u(x, y) = D_x^{-m+1} D_y^{-n+1}[H] + \sum_{j=0}^{n-2} D_y^{-j}(\psi_j(x)) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-2} D_x^{-i}(\varphi_i(y)) - \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{j=0}^{n-2} D_x^{-i} D_y^{-j}\left(D_y^j(\varphi_i(y_0))\right),$$

где

$$H(x,y,x,y)=D_y^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\varphi_{i-1}(\eta)\sum_{\alpha=i}^{m}\sum_{\beta=0}^{n}(-1)^{\alpha+\beta}D_x^{\alpha-i}D_y^{\beta}\left(a_{\alpha\beta}(x_0,\eta)R(x_0,\eta,x,y)\right)\right]+$$

$$+D_x^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\psi_{j-1}(\xi)\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{\beta=j}^{n}(-1)^{\alpha+\beta}D_x^{\alpha}D_y^{\beta-j}\left(a_{\alpha\beta}(\xi,y_0)R(\xi,y_0,x,y)\right)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j-1}D_y^{j-1}\left(\varphi_{i-1}(y)\right)\sum_{\alpha=i}^{m}\sum_{\beta=j}^{n}(-1)^{\alpha+\beta}D_x^{\alpha-i}D_y^{\beta-j}\left(a_{\alpha\beta}(x_0,y)R(x_0,y,x,y)\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j-1}D_x^{i-1}\left(\psi_{j-1}(x)\right)\sum_{\alpha=i}^{m}\sum_{\beta=j}^{n}(-1)^{\alpha+\beta}D_x^{\alpha-i}D_y^{\beta-j}\left(a_{\alpha\beta}(x,y_0)R(x,y_0,x,y)\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j-1}D_y^{j-1}\left(\varphi_{i-1}(y_0)\right)\sum_{\alpha=i}^{m}\sum_{\beta=j}^{n}(-1)^{\alpha+\beta}D_x^{\alpha-i}D_y^{\beta-j}\left(a_{\alpha\beta}(x_0,y_0)R(x_0,y_0,x,y)\right).$$

Здесь $R(x,y,\xi,\eta)$ - функция Римана, полученная как решение интегрального уравнения

$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{m+n-(i+j)}D_x^{i-m}D_y^{j-n}\left(a_{ij}V\right)=1$, которое существует и единственно [3].

Задача 1.

Для ее редукции к задаче Гурса поступаем следующим образом. Проинтегрируем (1) в пределах от y_* до y n раз $\left((x,y_*),(x,y)\in D\right)$, Затем в полученном соотношении устремим y_* к y_0:

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{p=0}^{j}D_y^{-(n-j)-p}\left[(-1)^p C_j^p D_y^p\left(a_{ij}(x,y)\right)D_x^i u(x,y)\right]-$$
$$-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=0}^{j-1}\sum_{p_1=0}^{p}D_y^{-(n-j)-p}\left[(-1)^{p_1}C_{j-(p-p_1)}^{p_1}\times\right.$$
$$\left.D_y^{p_1}\left(a_{ij}(x,y_0)\right)D_x^i D_y^{p-p_1}u(x,y_0)\right]=0\,. \qquad (3)$$

При выводе (3) существенно используется формула, являющаяся в определенном смысле интегральным аналогом известной формулы дифференцирования по правилу Лейбница:

$$D_y^{-n}\left[a_{kn}(x,y)D_y^n u(x,y)\right]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i D_y^{-i}\left[D_y^i\left(a_{kn}(x,y)\right)u(x,y)\right]-$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i_1=0}^{i}(-1)^{i_1}C^{i_1}_{n-(i-i_1)}D_y^{-i}\left[D_y^{i_1}\left(a_{kn}(x,y_0)\right)D_y^{i-i_1}u(x,y_0)\right].$$

Теперь продифференцируем (3) m_1-m раз по x:

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{p=0}^{j} D_y^{-(n-j)-p}D_x^{m_1-m}\left[(-1)^p C_j^p D_y^p\left(a_{ij}(x,y)\right)D_x^i u(x,y)\right]-$$

$$-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=0}^{j-1}\sum_{p_1=0}^{p} D_y^{-(n-j)-p}D_x^{m_1-m}\left[(-1)^{p_1}C^{p_1}_{j-(p-p_1)}D_y^{p_1}\left(a_{ij}(x,y_0)\right)D_x^i D_y^{p-p_1}u(x,y_0)\right]=0.$$

Положим в последнем тождестве $x=x_0$ и выделим слагаемое, в котором степень дифференцирования по x равна m_1. Таким образом, получим уравнение:

$$\sum_{j=0}^{n} D_y^{-j}\left[A_{mj}(y)\varphi_{m_1}(y)\right]=r_{m_1}(y) \qquad (4)$$

$$r_{m_1}(y)=-\sum_{j=0}^{n}\sum_{p=0}^{j}\sum_{k=1}^{m_1-m}D_y^{-(n-j)-p}\left[(-1)^p C^k_{m_1-m}C_j^p D_x^k D_y^p\left(a_{mj}(x_0,y)\right)D_x^{m_1-k}\left(u(x_0,y)\right)\right]-$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{p=0}^{j}\sum_{k=0}^{m_1-m}D_y^{-(n-j)-p}\left[(-1)^p C^k_{m_1-m}C_j^p D_x^k D_y^p\left(a_{ij}(x_0,y)\right)D_x^{m_1-k+i-m}\left(u(x_0,y)\right)\right]+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=0}^{j-1}\sum_{p_1=0}^{p}\sum_{k=0}^{m_1-m}D_y^{-(n-j)-p}\left[(-1)^{p_1}C^k_{m_1-m}C^{p_1}_{j-(p-p_1)}\cdot\right.$$

$$\left.D_x^k D_y^{p_1}\left(a_{ij}(x_0,y_0)\right)D_x^{m_1-k+i-m}D_y^{p-p_1}\left(u(x_0,y_0)\right)\right].$$

Здесь $A_{mj}=\sum_{p=0}^{j}C^p_{n-(j-p)}D_y^p\left(a_{m,n-(j-p)}(x_0,y)\right)(-1)^p$. Функция $\varphi_{m_1}(y)$ в левой части равенства является известной. Неизвестными, кроме $\varphi(y)$, являются $\varphi_{m_1-1}(y),\ldots,\varphi_m(y)$. Для их определения будем использовать аналоги (4), которые получаются дифференцированием (3) $m_1-m-1,\ldots,0$ раз соответственно:

$$\sum_{j=0}^{n} D_y^{-j}\left[A_{mj}(y)\varphi_{m_1-s}(y)\right]=r_{m_1-s}(y) \tag{5}$$

$$r_{m_1-s}(y)=-\sum_{j=0}^{n}\sum_{p=0}^{j}\sum_{k=1}^{m_1-m-s} D_y^{-(n-j)-p}\left[(-1)^p C_{m_1-m-s}^k C_j^p D_x^k D_y^p\left(a_{mj}(x_0,y)\right)D_x^{m_1-k-s}\left(u(x_0,y)\right)\right]-$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{p=0}^{j}\sum_{k=0}^{m_1-m-s} D_y^{-(n-j)-p}\left[(-1)^p C_{m_1-m-s}^k C_j^p D_x^k D_y^p\left(a_{ij}(x_0,y)\right)D_x^{m_1-s-k+i-m}\left(u(x_0,y)\right)\right]+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=0}^{j-1}\sum_{p_1=0}^{p}\sum_{k=0}^{m_1-m-s} D_y^{-(n-j)-p}\left[(-1)^{p_1} C_{m_1-m-s}^k C_{j-(p-p_1)}^{p_1}\cdot\right.$$

$$\left. D_x^k D_y^{p_1}\left(a_{ij}(x_0,y_0)\right)D_x^{m_1-s-k+i-m}D_y^{p-p_1}\left(u(x_0,y_0)\right)\right].$$

Последовательная подстановка функций друг в друга приводит к некоторому интегральному уравнению, связывающему φ_{m_1} и φ_0. Однако, в общем случае, каждая из неизвестных функций записывается в терминах резольвент. Для их нахождения в квадратурах требуются дополнительные условия на коэффициенты $A_{mj}(y)$ (j=0,…, n). А именно:

1) $A_{m1}\neq 0$, $A_{m2}\equiv\ldots\equiv A_{mn}\equiv 0$,

2) $A_{m1}\neq 0$, $A_{m2}\neq 0$, $A_{m3}\equiv\ldots\equiv A_{mn}\equiv 0$, $A_{m1}-yA_{m2}\equiv 0$

Пусть, например, имеет место первый случай (второй рассматривается аналогично). Тогда левые части (4) и (5) перепишутся следующим образом: $\varphi_{m_1}(y)+D_y^{-1}\left[A_{m_1}(\eta)\varphi_{m_1}(\eta)\right]=r_{m_1}(y)$,

$$\varphi_{m_1-s}(y)+D_y^{-1}\left[A_{m_1}(\eta)\varphi_{m_1-s}(\eta)\right]=r_{m_1-s}(y).$$

Из последнего уравнения функции φ_{m_1-s} $(s=1,..,m_1-m)$ определяются в явном виде:

$$\varphi_{m_1-s}(y)=r_{m_1-s}(y)-D_y^{-1}\left[A_{m_1}(\eta)r_{m_1-s}(\eta)\exp\int_y^{\eta}A_{m1}(\tau)\,d\tau\right].$$

Ниже запишем один из вариантов разрешимости получаемого уравнения, связывающего φ_{m_1} и φ_0.

Теорема. Если коэффициент при φ_0 в выражении

$$\sum_{k=0,..}\prod_{p=1}^{k}(-1)^{k+1}S_{\alpha_p}\left(m_1-m+\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j-m)a_{\alpha_p,n}\right)\cdot D_x^{m_1-m+\sum_{p=1}^{k}(\alpha_p-m-i_p)}(a_{0n})\varphi_0$$

отличен от нуля и коэффициенты $a_{\alpha_p,n}\in C^{(m_1-m),n}(D\cup p)$

($\alpha_p=0,..,m-1$), тогда задача 1 редуцируется к задаче Гурса. Роль произвольных констант играют $\varphi_{m+1}(y_0),\ldots,\varphi_{m_1-1}(y_0)$.

Здесь введены следующие обозначения, позволившие компактно записать результат:

$$S_{\alpha_p}\left(m_1-2m-1+\alpha_p,a_{\alpha_p,n}\right)=\sum_{i\le m_1-2m-1+\alpha_p}C_{N-m-1}^{i}D_x^{i}\left(a_{\alpha_p,n}\right),\ \alpha_p=0,..,m-1.$$

Подобным образом строится решение задачи 2.

Две указанные характеристические задачи можно считать базовыми к другим задачам. В частности, можно рассмотреть задачу 3. Здесь неизвестными являются обе функции $\varphi_0(y)$ и $\psi_0(x)$. В общем случае они определяются в терминах резольвент. В качестве дополнительных условий гладкости выступают $a_{\alpha_p,n}\in C^{(m_1-m),n}(D\cup p)$

($\alpha_p=0,..,m-1$), $a_{m,\beta_p}\in C^{m,(n_1-n)}(D\cup q)$ ($\beta_p=0,..,n-1$) Роль произвольных постоянных играют $\varphi(y_0)$, $\varphi_{m+1}(y_0)$, $\ldots$, $\varphi_{m_1-1}(y_0)$, $\varphi'_{m+1}(y_0)$, $\ldots$, $\varphi'_{m_1-1}(y_0)$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}_{m+1}(y_0)$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}_{m_1-1}(y_0)$, $\psi_{n+1}(x_0)$, $\ldots$, $\psi_{n_1-1}(x_0)$, $\ldots$ $\psi^{(m-1)}_{n+1}(x_0),\ldots,\psi^{(m-1)}_{n_1-1}(x_0)$.

В случае изменения условий гладкости на функции φ_i ($i=1,\ldots,m-1,m_1$), ψ_j ($j=1,\ldots,n-1$, n_1) количество произвольных постоянных может изменяться. В частности, если в условиях задачи 1 $\psi_j \in C^{m_1}(q)$, тогда условие задачи Гурса $\varphi_0(y)$ определяется однозначно.

Литература

[1] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А.Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка//Докл. РАН. 1987. Т.297. №3. С.547-552.

[2] Уткина Е.А. Новые варианты характеристических задач для псевдопараболических уравнений.- Дисс…. Канд.физ.мат.наук. – Казань, 2000.

[3] Мюнтщ Г. Интегральные уравнения, Т.1. М. 1934.