УДК 517.946

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ $N$ ДЛЯ ОДНОГО $B$-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ГРИНА

© Р.М.Сафина

В работе доказывается существование и единственность решения задачи $N$ для одного $B$-эллиптического уравнения методом функции Грина.

Пусть $E_2^{++}$ - первый квадрант координатной плоскости $Oxy$, $D$ - конечная область в $E_2^{++}$, ограниченная спрямляемой жордановой кривой $\Gamma$ с концами в точках $A(0,1)$ и $B(1,0)$ и отрезками $\Gamma_0 = OA$ и $\Gamma_1 = OB$ осей координат, $D_e = E_2^{++} \setminus \overline{D}$.

Четное по $x$ решение уравнения

$$\Delta_B u = 0, \qquad (1)$$

где $\Delta_B = B_x + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $B_x = x^{-k} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^k \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ - оператор Бесселя, $k > 0$ - постоянная в области $D$ $(D_e)$ называется $B$-гармонической функцией в этих областях.

Краевые задачи для уравнения (1) изучались в [1] методом потенциалов для области $\Omega$ с гладкой границей $\gamma$. В работе [2] решена задача Дирихле для уравнения (1) в области $\Omega$ с границей $\gamma$ произвольной структуры методом Винера. В настоящей работе решается задача $N$ для уравнения (1) в области $D$ методом функции Грина.

Результаты настоящей работы могут найти приложение в теории краевых задач для уравнения смешанного типа с оператором Бесселя и осесимметрических задач теории потенциала, применяемых при решении многих важных вопросов прикладного характера.

## 1. Постановка задачи $N$ и единственность ее решения

**Внутренняя задача** $N$. *Найти четную по* $x$ *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup OB \cup OA) \cap C^2(D); \qquad (2)$$

$$\Delta_B u = 0,\ (x,y) \in D; \qquad (3)$$

$$u|_\Gamma = \varphi(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in \Gamma; \qquad (4)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x),\ 0 < x < 1. \qquad (5)$$

**Теорема 1.** *Внутренняя задача* $N$ *не может иметь более одного решения.*

**Доказательство**. Пусть $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ - два предполагаемых решения внутренней задачи $N$. Тогда их разность $\omega(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ четна по $x$, удовлетворяет условиям (2), (3) задачи $N$ и однородным граничным условиям:

$$\omega|_\Gamma = 0, \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial \omega}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \qquad (7)$$

Значит, функция $\omega(x,y)$ является $B$-гармонической в области $D$, непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$ и один раз непрерывно дифференцируемой в $D \cup OB \cup OA$.

В силу известного принципа экстремума для $B$-гармонических функций $\max\limits_{\overline{D}} u$ $\left(\min\limits_{\overline{D}} u\right)$ достигаются на границе $\partial D \setminus OA$ области $D$, если она не постоянна. Пусть функция $\omega(x,y)$ достигает $\max\limits_{\overline{D}} \omega$ $\left(\min\limits_{\overline{D}} \omega\right)$ в точке $M_0(x_0,0) \in OB$. Тогда в силу граничного принципа экстремума $\dfrac{\partial \omega(x_0,0)}{\partial y} < 0$ $\left(\dfrac{\partial \omega(x_0,0)}{\partial y} > 0\right)$, что противоречит граничному условию (7). Поэтому функция $\omega(x,y)$ может достигать $\max\limits_{\overline{D}} \omega$ и $\min\limits_{\overline{D}} \omega$ только на границе $\Gamma$. В силу граничного условия (6) $\max\limits_{\overline{D}} \omega = \min\limits_{\overline{D}} \omega = 0$. Таким образом, $\omega \equiv 0$, и, следовательно, $u_1(x,y) \equiv u_2(x,y)$. Теорема доказана.

**Внешняя задача** $N$. *Найти четную по* $x$ *функцию, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}_e) \cap C^1(D_e \cup BB^* \cup AA^*) \cap C^2(D_e), \qquad (8)$$

*где* $A^*(0,\infty), B^*(0,\infty)$;

$$\Delta_B u = 0,\ (x,y) \in D_e; \qquad (9)$$

$$u = o(1) \ \text{при} \ r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty; \qquad (10)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\ 0\le x<\infty; \qquad (11)$$

$$u|_{\Gamma}=g(\xi,\eta),\ (\xi,\eta)\in\Gamma. \qquad (12)$$

**Теорема 2.** *Внешняя задача $N$ не может иметь более одного решения.*

**Доказательство.** Пусть $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ - два предполагаемых решения внешней задачи $N$. Тогда их разность $\omega(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ четна по $x$, удовлетворяет условиям (8)-(11) задачи $N$ и однородному граничному условию:

$$\omega|_{\Gamma}=0. \qquad (13)$$

Рассмотрим четверть круга $K_R^+$ с центром в начале координат и радиуса $R$ такого, что $D\subset K_R^+$. Область $K_R^+\setminus D$ ограничена кривой $\Gamma$, осями координат и четвертью окружности $C_R^+$.

В силу условия (10) $\forall\varepsilon>0\ \exists R_0$, что при $R\ge R_0$: $|\omega|<\varepsilon$ на $C_R^+$.

В силу граничного условия (11) $\omega$ достигает $\max\limits_{D}\omega$ и $\min\limits_{D}\omega$ на границе $\Gamma\cup C_R^+$.

Так как $|\omega|<\varepsilon$ на $\Gamma\cup C_R^+$, то в силу принципа экстремума $|\omega|\le\varepsilon$ в $K_R^+\setminus D$. Если устремлять $\varepsilon$ к нулю, тогда $R\to\infty$, получаем, что $\omega\equiv 0$ в $D_e$ и, следовательно, $u_1(x,y)\equiv u_2(x,y)$. Теорема доказана.

## 2. Существование решения задачи $N$

Покажем, что можно ограничиться случаем, когда $\nu(x)=0$.

Известно [3] , что фундаментальное решение уравнения (3) с особенностью в начале координат имеет вид

$$k(x,y)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^k}, \qquad (14)$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$ .

Для получения фундаментального решения с особенностью в точке $M_0(x_0,y_0)$ применим к функции (14) оператор обобщенного сдвига $T_{x,y}^{x_0,y_0}$:

$$\varepsilon(x,y;x_0,y_0)=T_{x,y}^{x_0,y_0}k(x,y)=$$
$$=\frac{C_k}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+x_0^2-2xx_0\cos\varphi+\right.$$
$$\left.+(y-y_0)^2\right)^{-\frac{k}{2}}\sin^{k-1}\varphi d\varphi, \qquad (15)$$

где $C_k=\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\Big/\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)$.

Также известно [4], что при $x\to x_0$, $y\to y_0$

$$x_0^k T_{x,y}^{x_0,y_0}k(x,y)=O\left(\ln r_{MM_0}\right). \qquad (16)$$

С помощью фундаментального решения (15) образуем функцию

$$V(x,y)=-\int_0^1\nu(t)\varepsilon(t,0;x,y)t^k\,dt. \qquad (17)$$

Ясно, что функция $V(x,y)$ является регулярным решением уравнения (3) в верхней полуплоскости $y>0$, и нетрудно доказать, что

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial V}{\partial y}=\nu(x). \qquad (18)$$

Решение задачи типа $N$ ищем в виде $u(x,y)=U(x,y)+V(x,y)$, где $U(x,y)$ - решение задачи типа $N$ с граничными условиями

$$U|_{\Gamma}=\varphi(p)-V|_{\Gamma}=\varphi(p)+$$
$$+\int_0^1\nu(t)\varepsilon(t,0,p)t^k dt=\varphi_1(p),\ \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \qquad (19)$$

Итак, доказано, что в случае задачи типа $N$ можно ограничиться случаем $\nu(x)=0$.

Рассмотрим задачу типа $N$ в следующей постановке:

*Найти функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую условиям*

$$U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup OB\cup OA)\cap C^2(D); \qquad (20)$$

$$\Delta_B U(x,y)=0,\ (x,y)\in D; \qquad (21)$$

$$U|_{\Gamma}=\varphi_1(p),\ p(\xi,\eta)\in\Gamma; \qquad (22)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0}=0. \qquad (23)$$

Рассмотрим потенциал двойного слоя:

$$W(x,y)=\int_{\Gamma}\sigma(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}\left[E(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^k d\Gamma \qquad (24)$$

где $E(\xi,\eta;x,y)=\varepsilon(\xi,\eta;x,y)+\varepsilon(\xi,\eta;x,-y)$, $p=p(\xi,\eta)$.

Из оценки (16) следует, что фундаментальное решение $E(\xi,\eta;x,y)$, умноженное на $\xi^k$, имеет логарифмическую особенность. Поэтому потенциал двойного слоя (24) на границе $\Gamma$ ведет себя так же, как логарифмический потенциал двойного слоя, т.е. имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть $\Gamma$ - кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол. Тогда, если $\sigma\in C(\Gamma)$, то для потенциала двойного слоя (24) справедливы следующие предельные соотношения:*

$$W_i(x_0,y_0)=-\frac{1}{2}\sigma(x_0,y_0)+\overline{W(x_0,y_0)}, \qquad (25)$$

$$W_e(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\sigma(x_0,y_0)+\overline{W(x_0,y_0)}, \qquad (26)$$

*где* $W_i(x_0,y_0)$ *и* $W_e(x_0,y_0)$ *означает предельные значения* $W(x,y)$ *в точке* $(x_0,y_0)\in\Gamma$ *при* $(x,y)\to(x_0,y_0)$ *соответственно изнутри и извне* $\Gamma$, $\overline{W(x_0,y_0)}$ *- прямое значение потенциала* $W(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0;y_0)\in\Gamma$.

Решение задачи (20)-(23) ищем в виде

$$U(x,y)=\int_\Gamma \sigma(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma. \qquad (27)$$

Ясно, что функция (27) удовлетворяет условиям (20), (21) и (23). Неизвестную плотность $\sigma(\xi,\eta)$ найдем из требования, чтобы функция (27) удовлетворяла граничному условию (22). Подставляя ее в это граничное условие, с учетом формулы скачка (25), получаем

$$-\frac{1}{2}\sigma(x,y)+\int_\Gamma \sigma(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma= =\varphi_1(x,y), \qquad (28)$$

или

$$\sigma(x,y)-2\int_\Gamma \sigma(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma= =-2\varphi_1(x,y). \qquad (29)$$

К этому интегральному уравнению применимы теоремы Фредгольма. Поэтому разрешимость задачи типа $N$ будет доказана, если доказать, что однородное уравнение, соответствующее (29), имеет только нулевое решение. Докажем это.

Пусть $\sigma_0(x,y)$ - нулевое решение однородного интегрального уравнения

$$\sigma(x,y)-2\int_\Gamma \sigma(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma=0. \qquad (30)$$

Рассмотрим функцию $U_0$ вида

$$U_0(x,y)=\int_\Gamma \sigma_0(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma. \qquad (31)$$

Функция (31) удовлетворяет условиям (20), (21), (23) и однородному граничному условию

$$U_0\big|_\Gamma=0.$$

В силу единственности решения задачи типа $N$ $U_0(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{D}$ и, следовательно, на $\Gamma$

$$-\frac{1}{2}\sigma_0(x,y)+ +\int_\Gamma \sigma_0(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma=0. \qquad (32)$$

Рассмотрим теперь функцию $U_0(x,y)$ в области $D_e$. Она в этой области удовлетворяет условиям (8)-(11) внешней задачи типа $N$ и однородному граничному условию $U_0\big|_\Gamma=0$. В силу единственности решения внешней задачи типа $N$ $U_0(x,y)\equiv 0$ в $D_e$ и, следовательно, на $\Gamma$

$$\frac{1}{2}\sigma_0(x,y)+ +\int_\Gamma \sigma_0(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma=0. \qquad (33)$$

Вычитая (32) из (33), получаем, что $\sigma_0(x,y)=0$. Это означает, что однородное интегральное уравнение (30) имеет только тривиальное решение. В силу теоремы Фредгольма интегральное уравнение (29) при любой непрерывной функции $\varphi(x,y)$ однозначно разрешимо и вместе с ним однозначно разрешима внутренняя задача типа $N$. Это приводит к следующей теореме.

**Теорема 4.** *Если* $\Gamma$ *- кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для кривой при* $\varphi_1(x,y)\in C(\overline{\Gamma})$ *разрешима внутренняя задача типа* $N$, *и ее решение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя (27).*

**Определение.** Функцией Грина задачи типа $N$ для уравнения (21) называется функция $G(x,y;x_0,y_0)$, удовлетворяющая условиям:

1$_0$) она является решением уравнения (21) всюду в области $D$, за исключением точки $(x_0,y_0)\in D$;

2$_0$) удовлетворяет граничным условиям

$$G(x,y;x_0,y_0)\big|_\Gamma=0, \qquad (34)$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\ (x_0,y_0)\in D; \qquad (35)$$

3$_0$) она может быть представлена в виде

$$G(x,y;x_0,y_0)=E(x,y;x_0,y_0)+ +q(x,y;x_0,y_0), \qquad (36)$$

где

$E(x,y;x_0,y_0)=\varepsilon(x,y;x_0,y_0)+\varepsilon(x,y;x_0,-y_0)$,

$\varepsilon(x,y;x_0,-y_0)$ - фундаментальное решение уравнения (21) с особенностью в точке $(x_0,-y_0)$, $q(x,y;x_0,y_0)$ - регулярное решение уравнения (21) всюду в области $D$.

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $q(x,y;x_0,y_0)$, которая в силу (34) – (36) должна удовлетворять граничным условиям

$$q(x,y;x_0,y_0)\big|_\Gamma=-E(x,y;x_0,y_0)\big|_\Gamma, \quad (x_0,y_0)\in D \tag{37}$$

$$\left.\frac{\partial q(x,y;x_0,y_0)}{\partial y}\right|_{y=0}=0. \tag{38}$$

Будем искать функцию $q(x,y;x_0,y_0)$ в виде потенциала двойного слоя:

$$q(x,y;x_0,y_0)==\int_\Gamma \sigma_1(\xi,\eta;x_0,y_0)\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma. \tag{39}$$

Принимая во внимание (28) и граничное условие (37), получим интегральное уравнение для плотности $\sigma_1(\xi,\eta;x_0,y_0)$:

$$\sigma_1(x,y;x_0,y_0)-2\int_\Gamma \sigma_1(\xi,\eta;x_0,y_0)\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma==2E(x,y;x_0,y_0). \tag{40}$$

Правая часть уравнения (40) есть непрерывная функция от $(x,y)$ на $\Gamma$, $(x_0,y_0)\in D$. Выше было доказано, что $\lambda=2$ не является характеристическим числом ядра $\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)$, следовательно, уравнение (40) разрешимо и его решение можно записать в виде

$$\sigma_1(x,y;x_0,y_0)=2E(x,y;x_0,y_0)+,+4\int_\Gamma R_1(\xi,\eta;x,y)E(\xi,\eta;x_0,y_0)\xi^k d\Gamma \tag{41}$$

где $R_1(\xi,\eta;x,y)$ - резольвента ядра $\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)$. Подставляя (41) в (39), получаем

$$q(x,y;x_0,y_0)==2\int_\Gamma E(\xi,\eta;x_0,y_0)\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma++4\int_\Gamma\left[\int_\Gamma R_1(\varsigma,\tau;\xi,\eta)E(\varsigma,\tau;x_0,y_0)\varsigma^k d\Gamma\right]\times\times\frac{\partial}{\partial n_p}E(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma \tag{42}$$

С помощью известного [5] интегрального представления $B$-гармонической функции и второй формулы Грина для оператора $\Delta_B$ можно доказать, что решение задачи типа $N$ (20)-(23) может быть представлено в виде

$$U(x,y)=-\int_\Gamma \varphi_1(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}G(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma,$$

а задачи типа $N$ (2)-(5) – в виде

$$u(x,y)=-\int_0^1 \nu(t)\left[\int_\Gamma \varepsilon(t,0;\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}G(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma-\varepsilon(t,0;x,y)\right]t^k dt-\int_\Gamma \varphi(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n_p}G(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma$$

* * * * * * * * * *


1. Раджабов Н.Р. Построение потенциалов и исследование внутренних и внешних граничных задач типа Дирихле и Неймана для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу на плоскости // ДАН Тадж. ССР. 1974. Т.XVII. №8. С.7-10.
2. Мухлисов Ф.Г. Обобщенное решение задачи типа Дирихле для некоторых сингулярных эллиптических уравнений // Сиб.мат.журнал. 1990. Т.31. №5. С.79-91.
3. Киприянов И.А., Кононенко В.И. Фундаментальные решения $B$-эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1967. Т.3. №1. С.114-129.
4. Weinstein A. Discontinuous integrals and generalized potential theory // Trans of the Amer. Math.Soc. 1948. Vol.63. №2. P.342-354.
5. Мухлисов Ф.Г. Аналог неравенства Гарнака для $B$-гармонических функций // Успехи мат.наук. 1987. Т.4. №2 С.51-54.


# THE SOLUTION OF $N$ PROBLEM FOR ONE $B$-ELLIPTIC EQUATION USING THE GREEN FUNCTION METHOD

**R.M.Safina**

The given work proves the existence and uniqueness of the solution of $N$ problem for one $B$-elliptic equation using the Green function method.