С.В.Сушков, Е.Ю.Никитина

СТАТИЧЕСКОЕ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С ДВУМЯ СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ

Топологические ручки, соединяющие удаленные области пространства, или "мосты", связывающие различные вселенные называются в физической литературе кротовыми норами [1, 2]. Как известно, необходимым условием для существования кротовых нор является присутствие в горловине "экзотической" формы материи, нарушающей изотропное энергетическое условие. Моделями, в рамках которых возможно нарушение энергетических условий, являются различные варианты скалярно-тензорной теории гравитации [3-9]. Отысканию точных решений в теории гравитации со скалярным полем посвящено множество работ; укажем важнейшие из них [3,10-15]. В данной работе мы получаем точное статическое сферически симметричное решение в теории с двумя минимальным образом связанными с гравитацией скалярными полями, одно из которых является обыкновенным и имеет правильный знак кинетического члена, а другое, называемое *духовым* полем, имеет отрицательную кинетическую энергию.

Рассмотрим теорию гравитации с двумя скалярными полями f и h, описываемую действием вида

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\,\left[\frac{1}{16\pi G}R-\frac{1}{2}(\nabla f)^2+\frac{1}{2}(\nabla h)^2\right], \qquad (1)$$

где $g=\det\|g_{\mu\nu}\|$, $g_{\mu\nu}$ - метрика, R – скалярная кривизна. Здесь f – это обыкновенное скалярное поле, а h – духовое поле с отрицательной кинетической энергией. Варьируя действие (1) по метрике $g_{\mu\nu}$ и по полям f и h, мы получим, соответственно, уравнения Эйнштейна и уравнения движения полей, которые в нашем случае могут быть записаны как

$$R_{\mu\nu}=8\pi G\left[f_{,\mu}f_{,\nu}-h_{,\mu}h_{,\nu}\right], \qquad (2)$$

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha f=\nabla^\alpha\nabla_\alpha h=0\cdot \qquad (3)$$

Из формулы (3) следует, что поля f и h можно представить следующим образом:

$$f=f_0\phi,\quad h=h_0\phi, \qquad (4)$$

где ϕ – некоторая функция координат, и f_0, h_0 – константы, имеющие смысл амплитуд полей. С учетом (4) система уравнений (2), (3) принимает вид

$$R_{\mu\nu}=\lambda\,\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}, \qquad (5)$$

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\phi=0, \qquad (6)$$

где введено обозначение

$$\lambda = 8\pi G(f_0^2 - h_0^2)\,. \qquad (7)$$

Отметим, что λ может иметь любые числовые значения в зависимости от соотношения между f_0 и h_0. Ниже мы будем искать статические сферически симметричные решения системы уравнений (5), (6).

Метрика статического сферически симметричного пространства-времени имеет следующий общий вид:

$$ds^2 = -Adt^2 + A^{-1}dr^2 + Br^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,. \qquad (8)$$

Здесь $A(r)$ и $B(r)$ – неизвестные функции радиальной координаты r. Кроме того, скалярное поле ϕ в статическом сферически симметричном случае может зависеть только от r, поэтому примем, что $\phi = \phi(r)$. При этом уравнения Эйнштейна (5) сводятся к следующей системе:

$$\frac{A''}{A} + \frac{A'B'}{AB} + 2\frac{A'}{rA} = 0\,, \qquad (9)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{A''}{A} - \frac{B''}{B} - 2\frac{B'}{rB} - \frac{1}{2}\frac{A'B'}{AB} - \frac{A'}{rA} + \frac{1}{2}\frac{B'^2}{B^2} = \lambda\phi'^2\,, \qquad (10)$$

$$\frac{A'B'}{AB} + 2\frac{A'}{rA} + \frac{B''}{B} + 4\frac{B'}{rB} - \frac{2}{r^2AB} + \frac{2}{r^2} = 0\,, \qquad (11)$$

где штрих означает производную по r. Уравнение движения скалярного поля (6), записанное для метрики (8), принимает вид

$$\phi'' + \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{2}{r}\right)\phi' = 0\,. \qquad (12)$$

Отметим, что в силу выполнения тождества $(R_\nu^\mu - 1/2\,\delta_\nu^\mu R)_{;\mu} = 0$ и уравнения сохранения $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$ только три уравнения из системы (9-12) являются независимыми.

Получим некоторые следствия из системы уравнений (9-12). Перепишем уравнение (9) следующим образом:

$$\frac{B'}{B} = -\frac{A''}{A'} - \frac{2}{r}\,. \qquad (13)$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$B = \frac{b_0}{r^2A'}\,, \qquad (14)$$

где $b_0 \neq 0$ – константа интегрирования. Далее, подставляя выражение (13) в (12) и интегрируя, мы получим следующее выражение $\phi = \phi_0 + \phi_1 \ln A$, где ϕ_0, ϕ_1 – константы интегрирования. Учитывая инвариантность действия (1) относительно сдвига $\phi \to \phi + \phi_0$, мы без потери общности можем полагать, что $\phi_0 = 0$. Также, выбором амплитуд f_0 и h_0, мы можем добиться того, что $\phi_1 = 1$. Таким образом,

$$\phi = \ln A . \tag{15}$$

Подставляя выражения (13), (14) и (15) в (10), мы получим после некоторых преобразований уравнение для функции A:

$$\left(\frac{A''}{A'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{A''}{A'}\right)^2 = \lambda\left(\frac{A'}{A}\right)^2 . \tag{16}$$

Заметим, что это уравнение является дифференциальным уравнением третьего порядка, и поэтому оно может давать лишние решения, которые, в конечном счете, необходимо исключить. Для решения этого уравнения введем новые переменные: x и $u(x)$, где

$$x = A , \quad u(x) = \frac{A''}{A'^2} . \tag{17}$$

В этих обозначениях уравнение (16) принимает вид

$$u' + \frac{1}{2}u^2 = \frac{\lambda}{x^2} , \tag{18}$$

где штрих теперь обозначает производную по x. Общее решение уравнения (18) можно представить в следующем виде:

$$u = \frac{1}{x} + \frac{\sigma}{x}\frac{x^\sigma - C}{x^\sigma + C} , \tag{19}$$

где C – константа интегрирования, и

$$\sigma = (2\lambda + 1)^{1/2} . \tag{20}$$

Далее нам будет удобнее отдельно анализировать классы решений, соответствующие различным значениям параметра λ.

Класс I. $\lambda > -1/2$.

В этом случае $\sigma = \sqrt{2\lambda + 1}$ – действительный параметр. Решение в окончательном виде может быть представлено следующим образом:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^\delta dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\delta} dr^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1-\delta}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) , \tag{21}$$

$$\phi(r) = \delta \ln\left(1 - \frac{2m}{r}\right) , \tag{22}$$

где $\delta = \sigma^{-1} = 1/\sqrt{2\lambda + 1}$ и $m > 0$ – произвольная положительная константа.

Класс II. $\lambda = -1/2$.

В этом случае решение принимает следующий вид:

$$dr^2 = -e^{-\alpha/r}dt^2 + e^{\alpha/r}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] , \tag{23}$$

$$\phi(r) = -\frac{\alpha}{r} , \tag{24}$$

где $\alpha > 0$ – произвольная положительная константа.

Класс III. $\lambda < -1/2$.

Этому случаю соответствует решение следующего вида:

$$ds^2 = -e^{2u(r)}dt^2 + e^{-2u(r)}[dr^2 + (r^2 + r_0^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \qquad (25)$$

$$\phi(r) = 2u(r), \qquad (26)$$

где

$$u(r) = \frac{1}{|2\lambda + 1|^{1/2}} \operatorname{arctg}\frac{r}{r_0} \qquad (27)$$

и r_0 – произвольная положительная константа.

В заключение отметим, что в данной работе в рамках теории гравитации с двумя скалярными полями, описываемой действием вида (1), было построено однопараметрическое семейство решений.

Литература

Morris M.S., Thorne K.S., *Am. J. Phys.,* Vol.**56,** P.395, 1988.

Visser M., *Lorentzian wormholes – from Einstein to Hawking*, AIP Press, New York, 1995.

Фишер И. З., *ЖЭТФ,* Т.**18,** С.636-640, 1948.

Bergmann P.G., *Int. J. Theor. Phys.,* Vol.**1,** P.25-36, 1968.

Wagoner R., *Phys. Rev.* D, Vol.**1,** P. 3209-3216, 1970.

Nordtvedt K., Jr., *Astrophys. J.,* V.**161,** P.1059-1067, 1970.

Bekenstein J. D., *Phys. Rev.* D, V.**15,** P.1458-1468, 1977.

Jordan P., *Schwerkraft und Weltall*, Vieweg, Braunschweig, 1955.

Brans C., Dicke R. H., Phys. Rev., V.**124,** P.925-935, 1961.

Brans C. Phys. Rev., V.**125,** P.2194-2201, 1962.

Ellis H.G., *J. Math. Phys.,* V.**14,** P.104, 1973.

Bronnikov K.A., *Acta Phys. Pol.* B, Vol.**4,** P.251, 1973.

Barcelo C., Visser M., *Class. Quantum Grav.,* V.**17**, P.3843-3864, 2000.

Armendariz-Picon C., *Phys. Rev.* D, Vol.**65,** 104010, 2002.

Sushkov S.V., Kim S.-W., *Gen. Rel. Grav.,* V.**36,** P.1671-1678, 2004.