А.А.Попов

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРОХОДИМЫХ КРОТОВЫХ НОР В ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В работе получены самосогласованные решения полуклассических уравнений Эйнштейна, описывающие кротовую нору, радиус которой много меньше ее длины. Источником, порождающим такой объект, являются флуктуации вакуума квантованного скалярного поля.

I. Введение

Под кротовыми норами в теории искривленных пространств понимают топологические ручки, соединяющие удаленные области одной Вселенной или двух различных пространств-времен. Для того, чтобы кротовые норы существовали, необходимо, чтобы в наиболее узкой их части – горловине, находилась материя, нарушающая некоторые энергетические условия [1]. В качестве одного из примеров такой материи можно рассмотреть вакуум квантованных полей. Такой подход дает возможность рассматривать метрику кротовой норы как самосогласованное решение полуклассической теории гравитации. В рамках этой теории источником кривизны пространства-времени являются флуктуации вакуума квантованных полей и, возможно, Λ член

$$G^{\mu}_{\nu} + \Lambda \delta^{\mu}_{\nu} = 8\pi < T^{\mu}_{\nu} >_{ren}. \qquad (1)$$

Если число элементарных полей материи N >>1, то в главном приближении по $1/N$ можно не учитывать вклад в $< T^{\mu}_{\nu} >_{ren}$ от гравитонов, поскольку вычисление его связано с трудностями, возникающими из-за зависимости результата от калибровки. Другой проблемой является то, что эффекты поляризации вакуума определяются топологическими и геометрическими свойствами пространства-времени как целого. Это означает, что получение функциональной зависимости $< T^{\mu}_{\nu} >_{ren}$ от метрического тензора в произвольном пространстве-времени может быть неразрешимой задачей. И только в некоторых пространствах с высокой степенью симметрии $< T^{\mu}_{\nu} >_{ren}$ для безмассовых полей может быть вычислен, а уравнения (1) могут быть решены точно [2]. В некоторых случаях $< T^{\mu}_{\nu} >_{ren}$ определяется локальными свойствами пространства-времени, и поэтому можно приближенно вычислить функциональную зависимость вакуумного среднего тензора энергии-импульса квантованных полей от метрического тензора. Одним из наиболее известных случаев, в котором подобная ситуация реализуется, является случай очень массивного поля. В этом случае $< T^{\mu}_{\nu} >_{ren}$ может быть разложен по степеням малого параметра $1/(m\,l)$, где m это масса поля, а l – характерный масштаб кривизны пространства-времени [3, 4]. Немногочисленные попытки получить описывающее кро-

товую нору решение уравнений (1), используя первый неисчезающий член такого разложения, не дали положительного результата [5].

Необходимо отметить, что известны различные ограничения, накладываемые квантовой теорией поля, на параметры проходимых кротовых нор [6]. Как правило, эти ограничения касаются безмассового скалярного поля.

Целью этой работы является исследование возможности создания проходимых кротовых нор вакуумными флуктуациями квантованных полей с учетом однопетлевых поправок к Эйнштейновской теории гравитации. Одним из возможных путей решить эту задачу является использование так называемого аналитического приближения для вакуумного среднего тензора энергии-импульса квантованных полей [4, 7]. Этот подход был реализован в работах [8]. Проблема такого подхода связана с неопределенностью границ применимости аналитического приближения. Так, например, Хатсимовским было замечено, что в пространстве-времени являющимся прямым произведением плоскости Минковского и двумерной сферы постоянного радиуса (топологии такого пространства-времени и пространства-времени кротовой норы совпадают) аналитическое приближение дает неверный результат. Другим возможным путем получить решение, описывающее кротовую нору, уравнений (1) является использование модели кротовой норы с короткой горловиной [10] (см. также [11]). Эта модель представляет собой два идентичных пространства-времени Минковского, в каждом из которых вырезаны сферы одинакового радиуса. При этом точки одной сферы отождествляются с точками другой. Такую модель можно рассматривать как первое приближение кротовой норы, радиус горловины которой много меньше ее длины. В настоящее время, в рамках этой модели, посчитана только полная энергия вакуума квантованного скалярного поля. Тем не менее, это дает возможность дать некоторые оценки радиуса горловины кротовой норы, создаваемой вакуумными флуктуациями скалярного поля. Локальное приближение вакуумного среднего тензора энергии-импульса квантованных полей спина 1 и 1/2 было получено в работах [12] в рамках модели кротовой норы, имеющий радиус горловины много меньший длины горловины.

В этой работе для оценки вакуумного среднего тензора энергии-импульса квантованного скалярного поля в рамках модели кротовой норы, имеющей длину горловины много большую, чем ее радиус, используются результаты работы [13]. В следующем разделе дается обзор результатов этой работы. В разделе III приведены самосогласованные решения уравнений полуклассической теории гравитации, описывающие горловину кротовой норы в рамках рассматриваемой модели. Заключительные замечания даны в разделе IV.

II. Тензор энергии-импульса квантованного скалярного поля в пространстве-времени статической сферически симметричной кротовой норы, имеющей длинную горловину

Метрика пространства-времени статической сферически симметричной кротовой норы может быть записана в виде

$$ds^2 = -f\,dt^2 + d\rho^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\,, \qquad (2)$$

где предполагается, что $-\infty < \rho < \infty$. Также предполагается, что эта метрика является решением уравнений (1), в которых правая часть описывает флуктуации вакуума квантованного скалярного поля. Далее будем говорить, что кротовая нора имеет длинную горловину, если функции $f = f(\rho)$ и $r = r(\rho)$ меняются медленно, т.е.

$$L_*/L << 1\,, \qquad (3)$$

где

$$L_* = [m^2 + 2\xi/r^2]^{-1/2}\,, \qquad (4)$$

m – масса скалярного поля, ξ – константа связи скалярного поля с кривизной и L – характерный масштаб изменения метрических функций

$$L^{-1} = \max\left\{\left|d\ln(fr^2)/d\rho\right|,\ \left|d^2\ln(fr^2)/d\rho^2\right|^{1/2},\ \left|d^3\ln(fr^2)/d\rho^3\right|^{1/3},\ldots\right\}. \qquad (5)$$

Поскольку длина горловины не меньше L, то условие (3) гарантирует, что эта длина много больше параметра L_*.

Члены нулевого порядка, по отношению к малому параметру L_*/L, в выражениях для компонент перенормированного вакуумного среднего тензора энергии-импульса квантованного скалярного поля в координатах (2) имеют вид [13]

$$<T^t{}_t>_{ren} = <T^\rho{}_\rho>_{ren} = \frac{1}{4\pi^2 r^4}\left\{\frac{m^2r^2}{8}\left(\xi-\frac{1}{8}\right)+\frac{79}{7680}-\frac{11}{96}\xi+\frac{3}{8}\xi^2\right. \qquad (6)$$
$$+\left[-\frac{m^4r^4}{8}+\frac{m^2r^2}{2}\left(\frac{1}{6}-\xi\right)-\frac{1}{60}+\frac{1}{6}\xi-\frac{1}{2}\xi^2\right]\ln\sqrt{\frac{\mu^2}{m_{DS}{}^2r^2}}$$
$$\left.+\left[\frac{m^4r^4}{2}+2m^2r^2\left(\xi-\frac{1}{8}\right)+2\left(\xi-\frac{1}{8}\right)^2\right]\left[I_1(\mu)-I_2(\mu)\right]\right\},$$

$$<T^\theta{}_\theta>_{ren} = <T^\varphi{}_\varphi>_{ren} = \qquad (7)$$
$$\frac{1}{4\pi^2r^4}\left\{\frac{m^2r^2}{8}\left(\xi-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}\left(\xi-\frac{1}{8}\right)^2+\left[-\frac{m^4r^4}{8}+\frac{1}{60}-\frac{1}{6}\xi\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\xi^2\right]\ln\sqrt{\frac{\mu^2}{m_{DS}{}^2r^2}}+\left[2m^2r^2\left(\frac{1}{8}-\xi\right)-2\left(\xi-\frac{1}{8}\right)^2\right]I_1(\mu)$$
$$\left.+\left[\frac{m^4r^4}{2}+2m^2r^2\left(\xi-\frac{1}{8}\right)+2\left(\xi-\frac{1}{8}\right)^2\right]I_2(\mu)\right\},$$

$$<T^\mu{}_\nu>_{ren} = 0, \qquad \mu \neq \nu\,, \qquad (8)$$

где

$$\mu^2 = m^2r^2 + 2\xi - 1/4 > 0, \qquad (9)$$

$$I_1(\mu)=\int_0^\infty \frac{x\ln|1-x^2|}{1+e^{2\pi|\mu|x}}dx,\quad I_2(\mu)=\int_0^\infty \frac{x^3\ln|1-x^2|}{1+e^{2\pi|\mu|x}}dx, \tag{10}$$

постоянная m_{DS} есть масса поля в случае, если поле массивное. Для безмассового поля m_{DS} является произвольным параметром инфракрасного обрезания в перенормировочных контрчленах $<T^{\mu}_{\nu}>$. Выбор конкретного значения m_{DS} соответствует конечной перенормировки членов гравитационного лагранжиана и должен быть фиксирован экспериментом или наблюдениями. Отметим, что выражения (6-8) являются точными, если $f(\rho)=const$ и $r(\rho)=const$. Отметим, также, что $<T^{\mu}_{\nu}>_{ren}$ сохраняется $<T^{\mu}_{\nu}>_{ren;\mu}=0$ и, для безмассового поля, имеет след равный известной аномалии следа [14]. Более того, будучи ультрафиолетовым эффектом, поляризация вакуума в рассматриваемом случае (как и в случае очень массивного поля) является эффектом локальным и не зависит от выбора квантового состояния, в котором $<T^{\mu}_{\nu}>_{ren}$ вычисляется.

Принципиальной проблемой рассматриваемой задачи является то, что одна неизвестная величина r^2 должна удовлетворять двум независимым уравнениям системы (1), поскольку как $<T^{\mu}_{\nu}>_{ren}$, так и тензор Эйнштейна

$$G^t_t=G^\rho_\rho=-1/r^2+O(1/L^2),\ G^\theta_\theta=G^\varphi_\varphi=O(1/L^2). \tag{11}$$

определяется только этой переменной. Таким образом, решение рассматриваемой задачи существует, только если параметры Λ, m и ξ (при рассмотрении большого числа полей число таких параметров также велико) удовлетворяют некоторому условию. Ниже приводятся такие ограничения на параметры скалярного поля, при которых компоненты $<T^{\mu}_{\nu}>_{ren}$ могут быть выражены в элементарных функциях.

В первом случае

$$m^2r^2<<1,\quad \xi=1/6 \tag{12}$$

нетривиальные компоненты $<T^{\mu}_{\nu}>_{ren}$ имеют вид

$$<T^t_t>_{ren}=<T^\rho_\rho>_{ren}\cong\frac{1}{4\pi^2r^4}\left[0.00310+\frac{1}{720}\ln\left(m_{DS}{}^2r^2\right)+O\left(\frac{m^2}{r^2}\right)\right], \tag{13}$$

$$<T^\theta_\theta>_{ren}=<T^\varphi_\varphi>_{ren}\cong\frac{1}{4\pi^2r^4}\left[-0.00171-\frac{1}{720}\ln\left(m_{DS}{}^2r^2\right)+O\left(\frac{m^2}{r^2}\right)\right]. \tag{14}$$

Если переписать эти выражения следующим образом

$$<T^t_t>_{ren}=<T^\rho_\rho>_{ren}\cong\frac{K}{4\pi^2r^4}\ln\left(9.32317m_{DS}{}^2r^2\right)+O\left(\frac{m^2}{r^6}\right), \tag{15}$$

$$<T^\theta_\theta>_{ren}=<T^\varphi_\varphi>_{ren}\cong\frac{K}{4\pi^2r^4}\left[1-\ln\left(9.32317m_{DS}{}^2r^2\right)\right]+O\left(\frac{m^2}{r^6}\right), \tag{16}$$

то легко увидеть, что соответствующие выражения для безмассовых полей спина 1 и 1/2 отличаются от этих выражений только числовым коэффициентом [12]

$$K=\begin{cases}1/720, & s=0,\xi=1/6;\\ 1/60, & s=1/2;\\ 1/240, & s=1,\end{cases} \tag{17}$$

где s обозначает спин поля.

В случае очень массивного поля, т.е.

$$\mu^2>>1,\quad m^2r^2>>|2\xi-1/4|, \tag{18}$$

$<T^{\mu}_{\nu}>_{ren}$ может быть переписан следующим образом

$$<T^{\mu}_{\nu}>_{ren}=\frac{1}{4\pi r^2}\left[\frac{1}{m^2r^2}\left(\frac{\xi^3}{6}-\frac{\xi^2}{12}+\frac{\xi}{60}-\frac{1}{630}\right)+O\left(\frac{(2\xi-1/4)^2}{m^4r^4}\right)\right]\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Это приближение может быть получено непосредственно из соответствующих членов разложения ДеВитта-Швингера, если предположить, что функции f и r^2 являются постоянными.

III. Решения

а) Рассмотрим два скалярных поля: конформно инвариантное ($m_1=0,\xi_1=1/6$) и очень массивное ($\xi_2\equiv\xi$ - произвольная постоянная, $m_2\equiv m$, $\mu_2{}^2>>1, m^2r^2>>|2\xi-1/4|$). Предположим также, что $\Lambda=0$. В рассматриваемом приближении уравнения (1) могут быть переписаны следующим образом

$$-\frac{1}{8\pi r^2}\cong\frac{1}{4\pi^2r^4}\left[0.00310+\frac{1}{720}\ln\left(m_{DS}{}^2r^2\right)+\frac{1}{m^2r^2}\left(-\frac{\xi^3}{6}+\frac{\xi^2}{12}-\frac{\xi}{60}+\frac{1}{630}\right)\right], \tag{20}$$

$$0\cong\frac{1}{4\pi^2r^4}\left[-0.00171-\frac{1}{720}\ln\left(m_{DS}{}^2r^2\right)+\frac{1}{m^2r^2}\left(\frac{\xi^3}{3}-\frac{\xi^2}{6}+\frac{\xi}{30}-\frac{1}{315}\right)\right]. \tag{21}$$

Следствием этих уравнений является уравнение

$$r^4+\frac{r^2}{360\pi}+\frac{1}{\pi m^2}\left(\frac{\xi^3}{3}-\frac{\xi^2}{6}+\frac{\xi}{30}-\frac{1}{315}\right)\cong 0. \tag{22}$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим условию $r^2>>1/(720\pi)$, является

$$r^2\cong\sqrt{-\frac{1}{\pi m^2}\left(\frac{\xi^3}{3}-\frac{\xi^2}{6}+\frac{\xi}{30}-\frac{1}{315}\right)}\,. \tag{23}$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $m^2r^2>>|2\xi-1/4|$, условия справедливости этого решения можно записать так:

$$-\frac{\pi(2\xi-1/4)^2}{(\xi^3/3-\xi^2/6+\xi/30-1/315)} << m^2 << -518400\pi(\xi^3/3-\xi^2/6+\xi/30-1/315)\,. \qquad (24)$$

Второе независимое уравнение системы (20,21) можно рассматривать как условие на m_{DS}

$$m_{DS}{}^2 \cong \frac{\exp(-720\pi\sqrt{-(\xi^3/3-\xi^2/6+\xi/30-1/315)/(\pi m^2)})}{\sqrt{-(\xi^3/3-\xi^2/6+\xi/30-1/315)/(\pi m^2)}}\,. \qquad (25)$$

Примером решения, удовлетворяющего всем вышеперечисленным условиям, является

$$\xi=-10^4,\quad m^2=10^3,\quad \ln(m_{DS})\cong -10^7,\quad r\cong 101.49336\,. \qquad (26)$$

b) Рассмотрим одно конформно инвариантное скалярное поле и предположим, что $\Lambda\neq 0$. В этом случае уравнения полуклассической теории гравитации имеют следующий вид

$$-\frac{1}{8\pi r^2}+\frac{\Lambda}{8\pi}\cong\frac{1}{4\pi^2 r^4}\left[0.00310+\frac{1}{720}\ln\left(m_{DS}{}^2 r^2\right)\right], \qquad (27)$$

$$\frac{\Lambda}{8\pi}\cong\frac{1}{4\pi^2 r^4}\left[-0.00171-\frac{1}{720}\ln\left(m_{DS}{}^2 r^2\right)\right]. \qquad (28)$$

Следствием этой системы уравнений является

$$\Lambda r^4-r^2/2-1/(720\pi)=0\,. \qquad (29)$$

Таким образом, решение системы уравнений (27,28) может быть записано в виде

$$r^2=\frac{1+\sqrt{1+\Lambda/(45\pi)}}{4\Lambda},\quad (\Lambda>0)\,, \qquad (30)$$

$$m_{DS}\cong\frac{4\Lambda}{1+\sqrt{1+\Lambda/(45\pi)}}\exp\left[-1.73120-\frac{45\pi}{\Lambda}\left(1+\sqrt{1+\Lambda/(45\pi)}\right)\right]. \qquad (31)$$

Решение этой системы, удовлетворяющее условию

$$0<\Lambda<<45\pi\,, \qquad (32)$$

есть

$$r^2\cong\frac{1}{2\Lambda},\quad m_{DS}\cong 2\Lambda\exp\left(-\frac{90\pi}{\Lambda}\right), \qquad (33)$$

а примером такого решения является

$$\Lambda=10^{-121},\quad \ln(m_{DS})\cong -10^{123},\quad r\cong 10^{60}\,. \qquad (34)$$

IV. Заключение

В работе получены решения полуклассической теории гравитации, описывающие горловину проходимой кротовой норы, длина которой много больше размерного параметра $L_*=\left(m^2+2\xi/r^2\right)$. Такие объекты создаются вакуумными флуктуациями квантованных скалярных полей. Эти флуктуации описываются тензором энергии-импульса, свойства которого не зависят от

выбора квантового состояния поля и определяются только локальными характеристиками пространства-времени [13]. Предполагается, что геометрия пространства-времени вне горловины кротовой норы определяется и другими видами материи. Очевидными недостатками приведенных решений являются: 1) параметры полей должны удовлетворять некоторому условию; 2) в первом из рассмотренных случаев величина $|\xi|$, соответствующая большим (по сравнения с планковской длиной) значениям радиуса горловины кротовой норы, также является большой (по сравнению с 1), что представляется маловероятным. Следует, однако, заметить, что в случае большого числа N рассматриваемых полей радиус горловины r пропорционален $\sqrt{N}$ ($N^{1/4}$ в случае очень массивного поля). Поэтому большие значения радиуса горловины могут быть получены и при меньших значениях $|\xi|$.

Автор выражает признательность С.В.Сушкову и Н.Р.Хуснутдинову за полезные дискуссии. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 05-02-17344-а и грант № 05-02-17537-а).

Литература

[1] M. S. Morris and K. S. Thorne, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988); M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever, Phys. Rev. D **61**, 1446 (1988); E.E. Flanagan and R.M. Wald, Phys. Rev. D **54**, 6233 (1996); D. Hochberg and M. Visser, Phys. Rev. D **56**, 4745 (1997).

[2] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 99 (1980); С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, ЖЭТФ **78**, 20 (1980); Л. А. Кофман, В. Сахни, А. А. Старобинский, ЖЭТФ **85**, 1876 (1983); L. A. Kofman, V. Sahni, Phys. Lett. B **127**, 197 (1983); L. A. Kofman, V. Sahni, Phys. Lett. A **117**, 275 (1986).

[3] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951); B. S. DeWitt, Phys. Reports **19** C, 297 (1975);V. P. Frolov and A. I. Zel'nikov, Phys. Lett B **115**, 372 (1982); V. P. Frolov and A. I. Zel'nikov, Phys. Lett B 123, 197 (1983); V. P. Frolov and A. I. Zel'nikov, Phys. Rev. D **29**, 1057 (1984); R. Herman, Phys. Rev. D **58**, 084028 (1998); J. Matyjasek, Phys. Rev. D **59**, 044002 (1999); J. Matyjasek, Phys. Rev. D **61**, 124019 (2000); H. Koyama, Y. Nambu, and A. Tomimatsu, Mod. Phys. Lett. A **15**, 815 (2000); J. Matyjasek, Phys. Rev. D **63**, 084004 (2001).

[4] P. R. Anderson, W. A. Hiscock, and D. A. Samuel, Phys. Rev. D **51**, 4337 (1995).

[5] B. E. Taylor, W. A. Hiscock and P. R. Anderson, Phys. Rev. D **55**, 6116 (1997).

[6] L. H. Ford, T. A. Roman, Phys. Rev. D **53**, 5496 (1996); K. Nandi, Y. Zhang and K. Kumar Phys. Rev. D **70**, 064018 (2004).

[7] D. N. Page, Phys. Rev. D **25**, 1499 (1982); M. R. Brown and A. C. Ottewill, Phys. Rev. D **31**, 2514 (1985); M. R. Brown, A. C. Ottewill, and D. N. Page, Phys. Rev. D **33**, 2840 (1986); T. Zannias, Phys. Rev. D **30**, 1161 (1984); V. P. Frolov and A.I. Zel'nikov, Phys. Rev. D **35**, 3031 (1987); P. B. Groves, P. R. Anderson, and E. D. Carlson, Phys. Rev. D **66**, 124017 (2002).

[8] S. V. Sushkov, Phys. Lett. A **164**, 33 (1992); A. Popov and S.V. Sushkov, *Quantum Field Theory Under the Influence of External Conditions*, edited by M. Bordag (Teubner, Leipzig, 1996); D. Hochberg, A. Popov, and S. V. Sushkov, Phys. Rev. Lett **78**, 2050 (1997).

[9] В. М. Хатсимовский, (частная переписка с автором).

[10] N. R. Khusnutdinov, S. V. Sushkov, Phys. Rev. D **65**, 084028 (2002).

[11] N. R. Khusnutdinov, Phys. Rev. D **67**, 124020 (2003).

[12] V. M. Khatsymovsky, Phys. Lett. B **320**, 234 (1994); V. M. Khatsymovsky, Phys. Lett. B **399**, 215 (1997); V. M. Khatsymovsky, Phys. Lett. B **403**, 203 (1997).

[13] A. A. Popov, Phys. Rev. D **64,** 104005 (2001).

[14] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982).