**А.М. Нигмедзянова**

# ПОТЕНЦИАЛЫ, ПОРОЖДЁННЫЕ ОПЕРАТОРОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО СДВИГА

## § 1. Некоторые сведения из теории мер и Т – обобщённых функций

1.1. Пусть $D$ – область в $E_p^+$, ограниченная открытой частью $\Gamma^{(0)}$ гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью $\Gamma$, которая, в частности, может совпадать со всем $E_p^+$.

Пусть $F(D)$ обозначает $\sigma$ - алгебру всех борелевских подмножеств $D$, т.е. наименьшую $\sigma$ - алгебру, содержащую все компакты из $D$.

Зарядом $\nu$ будем называть вполне аддитивную функцию множеств, определённую на $F(D)$ и конечную на всех компактах $K \subset D$. Неотрицательный заряд $\nu$ есть мера $\mu$. Множество всех зарядов (мер) в $D$ обозначим через $\mathfrak{M}_D(\mathfrak{M}_D^+)$. Если $\mu(D) < \infty$, то мера $\mu$ называется конечной. Мера $\mu$ сосредоточена на множестве $D_1$, если $\mu(D \setminus D_1) = 0$. Наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена мера $\mu$, называется носителем меры $\mu$ и обозначается $S(\mu)$. Если $S(\mu)$ - компакт в $D$, то мера $\mu$ называется финитной в $D$. Также финитной в $D$ будем называть функцию $\psi(x)$, если её носитель является компактом в $D$.

Через $C_0(D)$ обозначим множество всех непрерывных и финитных в $D$ функций, причём $C_0(E_p^+) = C_0$. Сходимость в $C_0(D)$ определяется следующим образом: последовательность $\{\varphi_n(x)\} \subset C_0(D)$ сходится к

$\varphi(x) \in C_0(D)$, если последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно финитна и равномерно сходится к $\varphi(x)$.

Сопряжённое к $C_0(D)$ пространство $C_0^*(D)$, состоящее из линейных и непрерывных функционалов в $C_0(D)$, как известно ([1], стр. 14), отождествляется с пространством зарядов $\mathfrak{M}_D$ в том смысле, что если $f(x) \in C_0^*(D)$, то существует единственный заряд $\nu \in \mathfrak{M}_D$, что $f(\varphi) = \int_D \varphi(x) d\nu(x)$, $\varphi(x) \in C_0(D)$. В дальнейшем отождествляемые элементы $f \in C_0^*(D)$ и $\nu \in \mathfrak{M}_D$ будем обозначать одной буквой $\nu$ и писать $\nu(\varphi)$ вместо $f(\varphi)$. Будем говорить, что последовательность $\{\nu_n\} \in \mathfrak{M}_D$ сходится слабо ($\nu_n \xrightarrow{сл.} \nu$) если для любой $\varphi(x) \in C_0(D)$

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(\varphi) = \nu(\varphi).$$

Всякая локально суммируемая с весом $x_p^{-1}$ в $D$ функция $\psi(x)$ порождает заряд согласно формуле

$$\nu(e) = \int_e \psi(x) x_p^{-1} dx, \quad e \subset D. \tag{1}$$

В самом деле, нетрудно проверить, что функционал, определяемый формулой $\psi(\varphi) = \int_D \psi(x)\varphi(x) x_p^{-1} dx$, принадлежит $C_0^*(D)$ и, следовательно, существует единственный заряд $\nu$, для которого имеет место равенство $\int_D \psi(x)\varphi(x) x_p^{-1} dx = \int_D \varphi(x) d\nu(x)$.

Отсюда в силу единственности заряда имеем $d\nu(x) = \psi(x) x_p^{-1} dx$, что и доказывает формулу (1). Такой заряд $\nu$ будем называть абсолютно непрерывным зарядом, а функцию $\psi(x)$ - его плотностью.

Пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}^+$ и $\varphi(x)$ - неотрицательная функция из $C_0$. Сдвиг вида $\ln x_p - \ln x_{p_0} = \ln \frac{x_p}{x_{p_0}}$ будем называть логарифмическим, а оператор $\Lambda_x^{x_0}$, ставящий в соответствие функции $\varphi(x)$ функцию $\varphi(x' - x_0', \ln \frac{x_p}{x_{p_0}})$, т.е. $\Lambda_x^{x_0}\varphi(x) = \varphi(x_1 - x_{1_0}, x_2 - x_{2_0}, ..., x_{p-1} - x_{p-1_0}, \ln \frac{x_p}{x_{p_0}})$ будем называть оператором логарифмического сдвига.

Тогда, очевидно, если выполняется одно из условий

$$\int d\mu_1(x) \int \Lambda_x^{-y}\varphi(x) d\mu_2(y) < \infty$$

$$\int d\mu_2(x) \int \Lambda_x^{-y}\varphi(x) d\mu_1(y) < \infty, \qquad (2)$$

где символ $\int$ обозначает интегрирование по полупространству $E_p^+$, $\Lambda_x^{-y}\varphi(x) = \varphi(x' + y', \ln(x_p y_p))$, то функционал

$$\mu(\varphi) = \iint \Lambda_x^{-y}\varphi(x) d\mu_1(x) d\mu_2(y)$$

представляет собой линейный положительный функционал, определённый в $C_0$.

В силу известной теоремы ([1], стр.17) ему однозначно соответствует некоторая мера , которую мы будем называть свёрткой мер $\mu_1$ и $\mu_2$ и обозначать $\mu = \mu_1 * \mu_2$. Операцию свёртывания можно определить и в пространстве зарядов $\mathfrak{M}$. Пусть $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}$. Тогда $\nu_1 = \nu_1^+ - \nu_1^-$, $\nu_2 = \nu_2^+ - \nu_2^-$ ([1], стр.12) и $\nu_1 * \nu_2 = \nu_1^+ * \nu_2^+ + \nu_1^- * \nu_2^- - \nu_1^+ * \nu_2^- - \nu_1^- * \nu_2^+$ .

При этом предполагается, что все свёртки мер в правой части этой формулы имеют смысл.

Из определения следует, что свёртка зарядов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, а именно:

1). если существуют $\nu_1 * \nu_2$ и $\nu_2 * \nu_1$, то $\nu_1 * \nu_2 = \nu_2 * \nu_1$;

2). если существуют $\nu_1 * (\nu_2 * \nu_3)$ и $(\nu_1 * \nu_2) * \nu_3$, то $\nu_1 * (\nu_2 * \nu_3) = (\nu_1 * \nu_2) * \nu_3$.

Операцию сдвига $\Lambda_x^y$ заряда $\nu$ из $\mathfrak{M}$ определяем формулой

$$\nu_{x_0}(\varphi) = (\Lambda_x^{x_0}\nu)(\varphi) = \int \Lambda_x^{-x_0}\varphi(x)d\nu(x). \tag{3}$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\nu * \lambda = \int \nu_{x_0} d\lambda(x_0), \qquad \nu, \lambda \in \mathfrak{M}, \tag{4}$$

то есть $(\nu * \lambda)(\varphi) = \int \nu_{x_0}(\varphi) d\lambda(x_0), \quad \varphi \in C_0$.

В частности, когда $\lambda$ абсолютно непрерывный заряд с плотностью $\lambda(x)$, то формула (4) примет вид $\nu * \lambda = \int \Lambda_x^{x_0}\lambda(x) d\nu(x_0) = \nu(\Lambda_x^{x_0}\lambda(x))$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\mu_1 \xrightarrow{сл.} \mu$ и выполняется одно из двух предложений:

(i) мера $\chi$ финитна;

(ii) меры $\mu_n$ равномерно финитны.

Тогда $\chi * \mu_n \xrightarrow{сл.} \chi * \mu$.

Доказательство ничем не отличается от доказательства соответствующего утверждения в ([1], стр.27).

1.2. При рассмотрении некоторых вопросов нам понадобится множество функций $\varphi(x)$ таких, что $D_{x'}^{\alpha'} \mathrm{T}_{x_p}^{\alpha_p}\varphi(x)$ для всех $|\alpha'| + 2\alpha_p \geq 0$ непрерывны в $E_p^+$ и для всех натуральных $m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\rho_x^m D_{x'}^{\alpha'} \mathrm{T}_{x_p}^{\alpha_p}\varphi(x) \to 0 \quad \text{при } \rho_x \to \infty,$$

где $\rho_x = \sqrt{|x'|^2 + \ln^2 x_p}$, $T_{x_p}^{\alpha_p}$ означает итерацию оператора

$$T_{x_p} = x_p \frac{\partial}{\partial x_p}\left( x_p \frac{\partial}{\partial x_p} \right).$$

Их мы будем называть быстро убывающими основными функциями. Множество таких функций обозначим через $S_{\mathrm{T}}$. Совокупность всех непрерывных линейных функционалов на $S_{\mathrm{T}}$ называется пространством, сопряжённым к $S_{\mathrm{T}}$, и обозначается $S_{\mathrm{T}}^{'}$. Элементы $S_{\mathrm{T}}^{'}$ будем называть Т — обобщёнными (или просто обобщёнными) функциями медленного роста ([1], стр.50).

Значение функционала $f \in S_T^{'}$ на основной функции $\varphi \in S_T$ будем обозначать через $(f,\varphi)$. Ясно, что если $\varphi \in S_T$, то $\mathrm{T}_{x_p}\varphi \in S_T$. Отсюда следует, что функционал $F$, определяемый формулой

$$(F,\varphi) = (f, \mathrm{T}_{x_p}\varphi),$$

принадлежит $S_{\mathrm{T}}^{'}$, так что $(\mathrm{T}_{x_p} f,\varphi) = (f, \mathrm{T}_{x_p}\varphi)$.

Будем говорить, что последовательность $\{f_n\} \subset S_T^{'}$ сходится слабо ($f_n \xrightarrow{T-сл.} f$), если для любой $\varphi \in S_T$, $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n,\varphi) = (f,\varphi)$.

Для быстро убывающих основных функций преобразования Фурье определяются по формулам ([1], стр.53)

$$F_T[\varphi] = \hat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{E_p^+} \varphi(x) e^{ix'\xi'} x_p^{i\xi_p - 1}\, dx, \tag{5}$$

$$F_T^{-1}[\hat{\varphi}] = \varphi(x) = \int\limits_{E_p^+} \hat{\varphi}(\xi) e^{-ix'\xi'} x_p^{-i\xi_p}\, d\xi, \tag{6}$$

где $x'\xi' = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_{p-1}\xi_{p-1}$; а для T – обобщённых функций медленного роста $F \in S_T'$ по формуле

$$(F,\varphi) = (\hat{F},\hat{\varphi}),\hat{\varphi} \in S_T' \tag{7}$$

Свёртку T — обобщённой функции медленного роста $F \in S_T'$ и основной функции $\varphi \in S_T$ определяем по формуле $(F*\varphi)(x) = (F,\Lambda_x^y\varphi)$.

Очевидно, что функция $(F*\varphi)(x)$ бесконечно дифференцируема. Её называют регуляризацией $F$ с помощью $\varphi$.

Свёртку T — обобщённых функций медленного роста $F$ и $\Phi$ определим формулой

$$(F*\Phi,\varphi) = (F,(\Phi,\Lambda_x^{-y}\varphi)) \tag{8}$$

Через $G_T(D)$ ($G_T$) обозначим множество финитных в $D$ (соответственно в $E_p^+$) и бесконечно дифференцируемых функций. Всякий линейный непрерывный функционал $F$ в $G_T(D)$ (соответственно в $G_T$) будем называть T — обобщённой (или просто обобщённой) функцией. Линейное пространство всех T — обобщённых функций обозначим через $G_T'(D)$ (соответственно $G_T'$). Очевидно, что $G_T \subset S_T$, откуда $S_T' \subset G_T'$, а так же $G_T(D) \subset C_0(D)$ и, следовательно, $C_0'(D)$ принадлежит $G_T'(D)$. Иными словами, любой заряд $\nu \in \mathfrak{M}_D$, если его рассматривать только на $G_T(D)$, порождает T — обобщённую функцию $f$, так что

$$\nu(\varphi) = (f,\varphi),\varphi \in G_T(D). \tag{9}$$

При этом различным зарядам соответствуют различные T — обобщённые функции, что следует из плотности $G_T(D)$ в $C_0(D)$. В дальнейшем связанные формулой (9) T — обобщённую функцию $f$ и заряд $\nu$ будем считать тождественными и обозначать одной буквой, т.е. писать

$(\nu_T,\varphi)$ вместо $(f,\varphi)$. Кроме того, если при $D = E_p^+$ для некоторого N $\int d\nu(x)/(1+|x|)^N < \infty$ то заряд $\nu$ также принадлежит $S_T'$.

T — обобщённая функция, соответствующая T — абсолютно непрерывной мере $\psi$ с плотностью $\psi(x)$, называется обычной и определяется формулой

$$(\psi,\varphi) = \int_D \psi(x)\varphi(x)x_p^{-1}dx, \varphi \in G_T(D).$$

1.3.Рассмотрим в $E_p^+$ функцию $k_\alpha(x) = A(p,\alpha)\rho_x^{\alpha-p}$, где $\rho_x = \sqrt{|x'|^2 + \ln^2 x_p}$, $A(p,\alpha)$ - имеет нормировочный характер. Эта функция, которую мы будем называть ядром типа М. Рисса, является положительной непрерывной при $x' \neq 0, x_p \neq 1$ и при $0 < \alpha < p/2$ локально суммируемой с весом $x_p^{-1}$ в $E_p^+$ функцией и, следовательно, определяет Т-абсолютно непрерывную меру.

Переходя в уравнении ядра типа Рисса к новой системе координат

$$\xi_j = x_j, j = \overline{1, p-1}, \ \xi_p = \ln x_p$$

получаем ядро Рисса $k'_\alpha(x) = A(p,\alpha)r_x^{\alpha-p}$, для которого доказывается правило композиции ядер М. Рисса в ([1], стр. 63) $k'_\alpha * k'_\beta = k'_{\alpha+\beta}$.

Переходя к старым координатам, имеем правило композиции ядер типа М. Рисса $k_\alpha * k_\beta = k_{\alpha+\beta}$, верное для значений $\alpha$ и $\beta$ таких, что $\mathrm{Re}(\alpha+\beta) < p$; $\alpha, \beta \neq p+2n, (n = 0,1,2,\ldots)$.

Заметим, что последнее равенство при $0 < \alpha < p/2$ и $0 < \beta < p/2$ понимается в смысле равенства мер, а для других значений $\alpha$ и $\beta$ - в смысле Т-обобщённых функций.

## § 2. Определение и свойства Т-потенциала.

2.1. С помощью ядра $k(x)=k_2(x)$ образуем в пространстве $\mathfrak{M}$ интегральный оператор

$$V_T^{\nu}(x)=\int \Lambda_x^y k(x)d\nu(y), \tag{10}$$

который мы будем называть Т-потенциалом заряда $\nu$. Нетрудно проверить, что если Т-потенциал $V_T^{\mu}(x)$ меры $\mu\in\mathfrak{M}^+$ не равен тождественно бесконечности, то он локально суммируем с весом $x_p^{-1}$. Мы требуем, чтобы Т-потенциал $V_T^{\mu}(x)$ не был тождественно равен бесконечности. Покажем, что необходимым и достаточным условием конечности почти всюду Т-потенциала $V_T^{\mu}(x)$ является неравенство

$$\int_{C^+Q_1}|y|^{2-p}d\mu(y)<\infty, \tag{11}$$

где $C^+Q_1=E_p^+\setminus Q_1$, $Q_r=\left\{x\in E_p^+:|x'|^2+\ln^2 x_p<r^2\right\}$.

Пусть Т-потенциал $V_T^{\mu}(x)$ почти всюду конечен, а неравенство (11) не выполняется. Тогда для любого $r>0$

$$\int_{C^+Q_r}|y|^{2-p}d\mu(y)=\infty.$$

Отсюда и из очевидных неравенств $\left|\ln\dfrac{x_p}{y_p}\right|\le|x_p+y_p|$

$$|\ln x_p-\ln y_p|\le|x_p-y_p|,\ \text{если}\ x_p>y_p\ge 1, \tag{12}$$

$|\ln x_p-\ln y_p|\ge|x_p-y_p|$, если $0<y_p<x_p\le 1$, при достаточно большом r и при $|y|\ge|x|+1$ имеет место неравенство

$$\left(|x'-y'|^2+(x_p+y_p)^2\right)^{\frac{2-p}{2}}\ge[(1+|x|)/(1+2|x|)]^{p-2}|y|^{2-p}.$$

Отсюда следует, что

$$V_T^{\mu}(x)=\left|S_{x_0 1}\right|\int(|x'-y'|^2+\ln^2\frac{x_p}{y_p})^{\frac{2-p}{2}}\,d\mu(y)\geq$$

$$\geq\left|S_{x_0 1}\right|\int(|x'-y'|^2+(x_p+y_p)^2)^{\frac{2-p}{2}}\,d\mu(y)\geq$$

$$\geq\left|S_{x_0 1}\right|\int\limits_{C^+Q_{|x|+1}}(|x'-y'|^2+(x_p+y_p)^2)^{\frac{2-p}{2}}\,d\mu(y)>$$

$$>[(1+|x|)/(1+2|x|)]^{p-2}\left|S_{x_0 1}\right|\int\limits_{C^+Q_{|x|+1}}|y|^{2-p}\,d\mu(y)=\infty.$$

Пусть теперь выполнено условие (11). Так как при любом $r$

$$\int\limits_{Q_r}\Lambda_x^y|x|^{2-p}\,x_p^{-1}dx=0(|y|^{2-p}),|y|\to\infty,$$

то при условии (11) $\int\limits_{Q_r}V_T^{\mu}(x)x_p^{-1}dx=\int d\mu(y)\int\limits_{Q_r}\Lambda_x^y|x|^{2-p}\,x_p^{-1}dx<\infty$.

Таким образом, Т— потенциал $V_T^{\mu}(x)$ почти всюду конечен. Во всех случаях, когда мы рассмотрим нефинитные меры $\mu$ или заряды $\nu=\nu^++\nu^-$, мы будем считать выполненным условие (11) для $\mu,\nu^+$ и $\nu^-$. Так что Т — потенциал $V_T^{\nu}(x)=V_T^{\nu^+}(x)-V_T^{\nu^-}(x)$ нефинитного заряда будет иметь смысл почти всюду.

Образуем также с помощью ядра $k(x)$ билинейный функционал

$$I_T[\nu_1,\nu_2]=\iint\Lambda_x^y k(x)d\nu_1(x)d\nu_2(y). \tag{13}$$

В пространстве $\mathfrak{M}$ форма $(\nu_1,\nu_2)=I_T[\nu_1,\nu_2]$ формально удовлетворяет всем условиям скалярного произведения, кроме условия положительной определённости, которое совсем не очевидно. Имеет место

Теорема 1. Форма $(\nu,\nu)$ положительно определенна. При этом $(\nu,\nu)=0$ только при $\nu=0$.

Для $\nu \in \mathfrak{M}$ число $\|\nu\|^2$ называется энергией заряда $\nu$. Через $E_T(E_T^+)$ обозначим множество зарядов (соответственно мер) с конечной энергией..

2.2. В этом пункте приведём некоторые свойства Т— потенциала и интеграла энергии.

Теорема 2. Если мера $\mu$ финитна в $D$, то

$$\text{a) } \varliminf_{x \to x_0} V_T^{\mu}(x) = V_T^{\mu}(x_0), x_0 \in E_p^+.$$

Если $\mu_n \xrightarrow{сл} \mu$, то

$$\text{b) } \varliminf_{n \to \infty} V_T^{\mu_n}(x) \geq V_T^{\mu}(x);$$

$$\text{c) } \varliminf_{n \to \infty} I_T(\mu_n) \geq I_T(\mu).$$

Теорема 3. Если на $S(\mu)$ имеет место неравенство $V_T^{\mu}(x) \leq M$, то в $E_p^+$ $V_T^{\mu}(x) \leq 2^{p-2} M$.

Теорема 4. (Первый принцип максимума). Если мера $\mu$ имеет компактный носитель $S(\mu) \subset E_p^+$ и $V_T^{\mu}(x) \leq 1$ на $S(\mu)$, то $V_T^{\mu}(x) \leq 1$ всюду в $E_p^+$.

Теорема 5. Если Т — потенциал меры $\mu$ непрерывен на носителе $S(\mu)$, то он непрерывен в $E_p^+$.

Теорема 6. Пусть в области $D$ Т — потенциал $V_T^{\nu}(x)$ заряда $\nu$ равен почти всюду Т — гармонической функции $h(x)$. Тогда $\nu \equiv 0$ в $D$.

**Литература**

[1] Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. М., 1966.