А.М.Нигмедзянова

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть $E_p^+$ – полупространство $x_p > 0$ p – мерного евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, D-конечная область в $E_p^+$, ограниченная открытой частью $\Gamma_0$ гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью $\Gamma$.

В $E_p^+$ рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$T_\alpha U = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + x_p^\alpha \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_p}\right) = 0 \quad (1)$$

В этой работе доказывается существование единственного решения основных краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения (1). В первом параграфе выводятся формулы Грина для оператора $T_\alpha$ и вводится понятие $T_\alpha$ - гармонической функции. Во втором параграфе строится фундаментальное решение уравнения (1). В третьем параграфе дается интегральное представление решения данного уравнения. В четвертом параграфе изучаются некоторые свойства решений уравнения (1), в частности, доказывается принцип максимума. В пятом параграфе даются постановки основных краевых задач для уравнения (1) и доказывается единственность их решения. В шестом параграфе строятся потенциалы типа простого и двойного слоев и изучаются их свойства. В седьмом параграфе основные краевые задачи для уравнения (1) сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость.

## §1. Формулы Грина

В $E_p^+$ рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$T_\alpha U = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + x_p^\alpha \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha \frac{\partial U}{\partial x_p}\right) = 0, \quad (1)$$

где $\alpha > 1$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Уравнение (1) в характеристических координатах

$$\xi_j = x_j, j = \overline{1, p-1}, \quad \xi_p = \frac{x_p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

приводится к уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0, \quad (2)$$

а область D переходит в бесконечную область G. Отсюда следует, что если $V(\xi) = \varphi(\xi)$ – гармоническая функция в G, то функция $U(x) = \varphi\left(x', \frac{x_p^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$ будет решением уравнения (1) в области D. В силу известной теоремы о поведении гармонических функции на бесконечности, если при $x_p \to 0$ $U(x) = o(1)$, то $U(x) = 0(x_p^{(\alpha-1)(p-2)})$ при $x_p \to 0$, $p \geq 3$.

Методом разделения переменных можно показать, что любое ограниченное решение уравнения (1) при $x_p \to 0$ стремится к нулю, если оно не постоянное.

*Определение.* Регулярное решение $U(x)$ уравнения (1) в области $D$ назовем $T_\alpha$-гармонической функцией, если $U(x) = o(1)$ при $x_p \to 0$.

Множество всех $T_\alpha$ - гармонических в D и непрерывных в $\tilde{D} = D \cup \Gamma$ функций обозначим через $H_{T_\alpha}(\tilde{D})$. Множество функций V(x), m раз непрерывно дифференциируемых в $\tilde{D}$, таких, что при $x_p \to 0$ $V(x) = 0(x_p^{(\alpha-1)(p-2)})$ обозначим через $C_\alpha^m(\tilde{D})$. Также через $C_\alpha(\Gamma)$ обозначим множество функций $\psi(\xi)$, заданных на $\Gamma$ и удовлетворяющих условиям: 1) $\psi \in C(\Gamma)$; 2) $\psi = 0(\xi_s^\alpha)$ при $\xi_s \to 0$.

Пусть функции $U, V \in C^2(D) \cap C_\alpha^1(\tilde{D})$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что имеет место тождество

$$VT_\alpha U + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_j} + x_p^{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial x_p}\frac{\partial V}{\partial x_p} = \sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(V\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) + x_p^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^{\alpha} V\frac{\partial U}{\partial x_p}\right). \qquad (3)$$

Умножая обе части тождества (3) на $x_p^{-\alpha}$,интегрируя по области D и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\int_D VT_\alpha U x_p^{-\alpha} dx + \int_D \left(\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_j} + x_p^{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial x_p}\frac{\partial V}{\partial x_p}\right) x_p^{-\alpha} dx = \int_\Gamma VA_\alpha[U] x_p^{-\alpha} d\Gamma, \qquad (4)$$

где

$$A_\alpha[U] = \sum_{j=1}^{p-1}\cos(n, x_j)\frac{\partial U}{\partial x_j} + x_p^{2\alpha}\cos(n, x_p)\frac{\partial U}{\partial x_p}$$

– конормальная производная.

Формула (4) называется первой формулой Грина для оператора $T_\alpha$.

Меняя местами U и V в формуле (4), имеем

$$\int_D UT_\alpha V x_p^{-\alpha} dx + \int_D \left( \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} + x_p^{2\alpha} \frac{\partial V}{\partial x_p} \frac{\partial U}{\partial x_p} \right) x_p^{-\alpha} dx = \int_\Gamma UA_\alpha[V] x_p^{-\alpha} d\Gamma .$$

Вычитая это равенство из (4), получаем

$$\int_D \left( VT_\alpha U - UT_\alpha V \right) x_p^{-\alpha} dx = \int_\Gamma \left( VA_\alpha[U] - UA_\alpha[V] \right) x_p^{-\alpha} d\Gamma . \qquad (5)$$

Формула (5) называется второй формулой Грина для оператора $T_\alpha$ .

## §2. Фундаментальное решение

Фундаментальное решение уравнения Лапласа (2) имеет вид

$$W(\xi, \xi_0) = \frac{A}{r_{\xi\xi_0}^{p-2}} , \qquad (6)$$

где $r = \sqrt{(\xi_1 - \xi_{1_0})^2 + \ldots + (\xi_p - \xi_{p_0})^2}$ , А – нормирующая постоянная.

Переходя к старым переменным, имеем

$$E(x, x_0) = \frac{B}{\rho_{xx_0}^{p-2}} , \qquad (7)$$

где $\rho_{xx_0} = \sqrt{(x' - x'_0)^2 + \left( \frac{x_p^{1-\alpha} - x_{p_0}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2}$ , В – нормирующая постоянная.

Обозначим через $C_0^\infty(\mathrm{E}_p^+)$ множество всех бесконечно непрерывно дифференциируемых и финитных в $\mathrm{E}_p^+$ функций.

*Определение.* Функция $E(x, x_0)$ называется фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $x_0 \in \mathrm{E}_p^+$ , если она удовлетворяет условиям

1) для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathrm{E}_p^+)$ такой, что $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{Supp}\, \varphi(\mathrm{x})$ имеет место равенство

$$\int_{\mathrm{E}_p^+} E(x, x_0) T_\alpha \varphi(x) x_p^{-\alpha} dx = -\varphi(x_0) ;$$

2) она является решением во всех точках $\mathrm{E}_p^+$ , за исключением точки $x_0 \in \mathrm{E}_p^+$ .

Ясно, что функция (7) удовлетворяет второму условию определения фундаментального решения. Проверим выполнение первого условия.

Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathrm{E}_p^+)$ , $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{Supp}\, \varphi(\mathrm{x})$ – фиксированная точка, $S_{x_0\varepsilon}$ - сфера в $\mathrm{E}_p^+$ с центром в точке $x_0$ и радиуса $\varepsilon$ такого, что $S_{x_0\varepsilon} \subset E_p^+$ ,

$S_R^+ = \{x \in E_p^+ : |x| = R, x_p > 0\}$ – полусфера в $E_p^+$ с центром в начале координат и радиуса R. Через $Q_{\varepsilon R}^+$ обозначим область, ограниченную полусферой $S_R^+$, сферой $S_{x_0\varepsilon}$ и частью гиперплоскости $x_p = 0$.

Применяя к функциям (7) и $\varphi(x)$ вторую формулу Грина в области $Q_{\varepsilon R}^+$, получаем

$$\int_{Q_{\varepsilon R}^+} \left[ E(x,x_0)T_\alpha \varphi(x) - \varphi(x)T_\alpha E(x,x_0) \right] x_p^{-\alpha} dx = ,$$

$$= \int_{S_{x_0\varepsilon}} \left[ E(x,x_0)\overline{A}_\alpha[\varphi(x)] - \varphi(x)\overline{A}_\alpha[E(x,x_0)] \right] x_p^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon}$$

где $\overline{A}_\alpha$ – внутренняя конормаль к границе $S_{x_0\varepsilon}$.

Так как в $Q_{\varepsilon R}^+$ $T_\alpha E(x,x_0) = 0$, то последняя формула может быть записана следующим образом

$$\int_{Q_{\varepsilon R}^+} E(x,x_0)T_\alpha\varphi(x)x_p^{-\alpha}dx = -\int_{S_{x_0\varepsilon}} [E(x,x_0)A_\alpha[\varphi(x)] - \varphi(x)A_\alpha[E(x,x_0)]]x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon} = , \qquad (8)$$

$$= -\int_{S_{x_0\varepsilon}} E(x,x_0)A_\alpha[\varphi(x)]x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon} + \int_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)A_\alpha[E(x,x_0)]x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon} = I'_\varepsilon + I''_\varepsilon$$

где $A_\alpha$ – внешняя конормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$.

Вычислим пределы при $\varepsilon \to 0$ двух интегралов в правой части последней формулы. Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ $I'_\varepsilon \to 0$. Вычислим предел $I''_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. интеграла

$$I''_\varepsilon = \int_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)A_\alpha[E(x,x_0)]x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon} = ,$$

$$= B\int_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)\left[\sum_{j=1}^{p-1}\cos(n,x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho_{xx_0}^{p-2}}\right) + x_p^{2\alpha}\cos(n,x_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{1}{\rho_{xx_0}^{p-2}}\right)\right]x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon}$$

где n – внешняя нормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$, $(\cos(n,x_1), \cos(n,x_2), \ldots, \cos(n,x_p))$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности сферы $S_{x_0\varepsilon}$ в точке $x \in S_{x_0\varepsilon}$.

$$\cos(n, x_j) = \frac{x_j - x_{j_0}}{r_{xx_0}},\ j = \overline{1, p};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho_{xx_0}^{p-2}}\right) = -(p-2)\rho_{xx_0}^{1-p}\frac{x_j - x_{j_0}}{\rho_{xx_0}},\ j = \overline{1, p-1};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{1}{\rho_{xx_0}^{p-2}}\right) = -(p-2)\rho_{xx_0}^{1-p}\frac{x_p^{1-\alpha} - x_{p_0}^{1-\alpha}}{\rho_{xx_0} x_p^{\alpha}(1-\alpha)}$$

Отсюда следует, что

$$I''_{\varepsilon} =$$

$$= -\frac{(p-2)B}{\varepsilon}\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)\frac{\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j - x_{j_0})^2 + x_p^{\alpha}(x_p - x_{p_0})\left(\frac{x_p^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{x_{p_0}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)}{\rho_{xx_0}^{p}} x_p^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon} =$$

$$= -\frac{(p-2)B}{\varepsilon}\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)\frac{\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j - x_{j_0})^2 + x_p^{\alpha}(x_p - x_{p_0})\left(\frac{x_p^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{x_{p_0}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j - x_{j_0})^2 + \left(\frac{x_p^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{x_{p_0}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^2} x_p^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon}.$$

В последнем равенстве, пользуясь формулой Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0),$$

где $0 < \theta < 1$, получаем

$$I''_{\varepsilon} = -\frac{(p-2)B}{\varepsilon}\times$$

$$\times\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)\frac{\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j - x_{j_0})^2 + \left(\frac{x_p}{x_{p_0} + \theta(x_p - x_{p_0})}\right)^{\alpha}(x_p - x_{p_0})^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{p-1}(x_j - x_{j_0})^2 + (x_{p_0} + \theta(x_p - x_{p_0}))^{-2\alpha}(x_p - x_{p_0})^2\right)^{\frac{p}{2}}} x_p^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon}.$$

Переходя в этих интегралах к обобщенной сферической системе координат, сократив на $\varepsilon^{p+1}$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$I'' = -\frac{(p-2)B\varphi(x_0)}{x_{p_0}^{\alpha}}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_2 d\varphi_2\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{p-3}\varphi_{p-2} d\varphi_{p-2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1} d\varphi_{p-1}}{\left(\sin^2\varphi_{p-1} + x_{p_0}^{-2\alpha}\cos^2\varphi_{p-1}\right)^{\frac{p}{2}}},$$

где $I'' = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I''_{\varepsilon}$.

Откуда после элементарных преобразований, получаем

$$I'' = -(p-2)\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}B\varphi(x_0)$$

Полагая здесь $B = \dfrac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{(p-2)2\pi^{\frac{p}{2}}}$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I''_{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x)A_{\alpha}[E(x,x_0)]x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon} = -\varphi(x_0)\,. \qquad (9)$$

Таким образом, функция

$$E(x,x_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{(p-2)2\pi^{\frac{p}{2}}\rho_{xx_0}^{p-2}}$$

удовлетворяет первому условию определения и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $x_0$.

## §3. Интегральное представление

Найдем теперь интегральное представление $T_{\alpha}$-гармонической функции. Пусть $U(x)\in H_{T_{\alpha}}(\tilde{D})\cap C^1(\tilde{D})$. Зададим в области $D$ произвольную точку $x_0$. Вырежем эту точку шаром $Q_{x_0\varepsilon}$. Радиус $\varepsilon$ возьмем столь малым, чтобы шар $Q_{x_0\varepsilon}$ целиком находился внутри области $D$. Внутри области $D_{\varepsilon} = D\setminus\bar{Q}_{x_0\varepsilon}$ фундаментальное решение уравнения (1) принадлежит классу $H_{T_{\alpha}}(\tilde{D}_{\varepsilon})\cap C^1(\tilde{D}_{\varepsilon})$. Поэтому к функциям $U(x)$ и $E(x,x_0)$ в этой области можно применить вторую формулу Грина для оператора $T_{\alpha}$. Имеем

$$\int\limits_{D_{\varepsilon}}\left[E(x,x_0)T_{\alpha}U(x) - U(x)T_{\alpha}E(x,x_0)\right]x_p^{-\alpha}dx =$$
$$= \int\limits_{\Gamma}\left[E(x,x_0)A_{\alpha}[U(x)] - U(x)A_{\alpha}[E(x,x_0)]\right]x_p^{-\alpha}d\Gamma +$$
$$+ \int\limits_{S_{x_0\varepsilon}}\left[-E(x,x_0)A_{\alpha}[U(x)] + U(x)A_{\alpha}[E(x,x_0)]\right]x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon}.$$

Учитывая то, что $T_{\alpha}E(x,x_0)=0$, $T_{\alpha}U(x)=0$ в $D_{\varepsilon}$, получаем

$$\int_\Gamma \left[ E(x,x_0)A_\alpha[U(x)]-U(x)A_\alpha[E(x,x_0)]\right] x_p^{-\alpha}d\Gamma =$$
$$= \int_{S_{x_0\varepsilon}} \left[ E(x,x_0)A_\alpha[U(x)]-U(x)A_\alpha[E(x,x_0)]\right] x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon} = I_{1\varepsilon}+I_{2\varepsilon},$$

где $A_\alpha$ - внешняя конормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$. Вычислим пределы при $\varepsilon \to 0$ двух интегралов в правой части последней формулы. Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ $I_{1\varepsilon} \to 0$. Вычисление предела $I_{2\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$ проводится аналогично вышеприведенному вычислению $I''_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Так что имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{2\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{x_0\varepsilon}} U(x)A_\alpha[E(x,x_0)]x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon} = U(x_0)\cdot$$

Таким образом, для всякой функции $U(x)\in H_{T_\alpha}(\tilde{D})\cap C^1(\tilde{D})$ и для любой $x_0 \in D$ справедливо следующее интегральное представление

$$U(x_0)=\int_\Gamma [E(x,x_0)A_\alpha[U(x)]-U(x)A_\alpha[E(x,x_0)]]x_p^{-\alpha}d\Gamma\cdot$$

## §4. Свойства решений уравнения (1)

Функции из $H_{T_\alpha}(\tilde{D})$ обладают всеми основными свойствами гармонических функций.

Теорема 1. Если функция $U(x)\in H_{T_\alpha}(\tilde{D})\cap C^1(\tilde{D})$, то $\int_\Gamma A_\alpha[U(x)]x_p^{-\alpha}d\Gamma = 0\cdot$

Теорема 2. *(Принцип максимума).* Пусть $U(x)\in H_{T_\alpha}(\tilde{D})$, то функция $U(x)$ достигает своего положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значения на границе $\Gamma$, если она тождественно не равна нулю.

*Следствие.* Если функция $U(x)\in H_{T_\alpha}(\tilde{D})$, то $|U(x)|\le \max_{x_0\in\Gamma}|U(x_0)|,\ x\in D$. В частности, если $U(x)|_\Gamma = 0$, то $U(x)\equiv 0$ в $D$.

## §5. Постановка краевых задач типа Дирихле и Неймана. Теоремы единственности

*Внутренняя краевая задача типа Дирихле (Задача $D_i$).* Требуется найти функцию $U(x)$, $T_\alpha$-гармоническую в $D$, непрерывную в $\tilde{D}$ и удовлетворяющую граничному условию

$$U|_\Gamma = f(\xi)\,,\ f(\xi) \in C_\alpha(\Gamma) \qquad (10)$$

Теорема 3. Внутренняя краевая задача типа Дирихле (1), (10) не может иметь более одного решения.

*Внешняя краевая задача типа Дирихле (Задача $D_e$ ).* Требуется найти функцию $U(x)$ , $T_\alpha$ -гармоническую в $D_e$ , непрерывную в $\tilde{D}_e$ , равную нулю на бесконечности и удовлетворяющую граничному условию (10).

Теорема 4. Внешняя краевая задача типа Дирихле (1), (10) не может иметь более одного решения.

*Внутренняя краевая задача типа Немана (Задача $N_i$ ).* Требуется найти функцию $U(x)$ , $T_\alpha$ -гармоническую в $D$ , один раз непрерывно дифференциируемую в $\tilde{D}$ и удовлетворяющую граничному условию

$$A_\alpha[U(\xi)]|_\Gamma = \varphi(\xi)\,,\ \varphi(\xi) \in C_\alpha(\Gamma) \qquad (11)$$

Здесь $A_\alpha$ - внешняя конормаль.

Теорема 5. Внутренняя краевая задача типа Неймана (1), (11) не может иметь более одного решения.

*Внешняя краевая задача типа Неймана (Задача $N_e$ ).* Требуется найти функцию $U(x)$ , $T_\alpha$ -гармоническую в $D_e$ , один раз непрерывно дифференциируемую в $\tilde{D}_e$ , равную нулю на бесконечности и удовлетворяющую граничному условию (11). Здесь $A_\alpha$ - конормаль, направленная во вне области $\bar{D}$ .

Теорема 6. Внешняя краевая задача типа Неймана (1), (11) не может иметь более одного решения.

## §6. Потенциалы типа простого и двойного слоев для уравнения (1) и их свойства

С помощью фундаментального решения $E(x, x_0)$ уравнения (1) образуем поверхностные потенциалы типа простого и двойного слоев:

$$V(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}} \xi_p^{-\alpha} d\Gamma\,, \qquad (12)$$

$$W(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \nu(\xi) A_\alpha \left[\frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}}\right] \xi_p^{-\alpha} d\Gamma\,. \qquad (13)$$

Сначала рассмотрим интеграл типа Гаусса.

*Определение.* Интеграл вида

$$I=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma} A_{\alpha}\left[\frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}}\right]\xi_p^{\varepsilon-\alpha}d\Gamma$$ ,

назовем интегралом типа Гаусса. Здесь $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p=0$ прямой угол.

Теорема 7. *(Формула скачка).* Если $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p=0$ прямой угол, то

$$I=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma} A_{\alpha}\left[\frac{1}{\rho_{x_0\xi}^{p-2}}\right]\xi_p^{\varepsilon-\alpha}d\Gamma=\begin{cases}-1, x_0\in D;\\ -\frac{1}{2}, x_0\in\Gamma;\\ 0, x_0\in E_p^{+}\setminus\tilde{D}=D_e;\end{cases}.$$

Теорема 8. Пусть $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p=0$ прямой угол. Тогда при $\nu\in C(\Gamma)$ имеют место следующие предельные соотношения

$$W_i(x_0)=-\frac{\nu_0}{2}+\tilde{W}(x_0),\quad W_e(x_0)=\frac{\nu_0}{2}+\tilde{W}(x_0),$$

где $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ означают предельные значения потенциала $W(x)$ в точке $x_0\in\Gamma$ при $x\to x_0$ соответственно изнутри и извне границы $\Gamma$, а $\tilde{W}(x_0)$ – прямое значение потенциала $W(x)$ в точке $x_0\in\Gamma$. Здесь точка $x_0\in\Gamma$ – фиксированная точка границы $\Gamma$, $\nu_0=\nu(x_0)$ .

Рассмотрим конормальную производную потенциала типа простого слоя (12) в точке $x_0\in\Gamma$:

$$A_{\alpha x_0}\left[V(x)\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma}\mu(\xi)A_{\alpha x_0}\left[\frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}}\right]\xi_p^{\varepsilon-\alpha}d\Gamma$$

Теорема 9. Пусть $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p=0$ прямой угол. Тогда при $\mu\in C(\Gamma)$ имеют место следующие предельные соотношения

$$A_{\alpha x_0}\left[V_i(x_0)\right]=\frac{\mu_0}{2}+A_{\alpha x_0}\left[\tilde{V}(x_0)\right],\quad A_{\alpha x_0}\left[V_e(x_0)\right]=-\frac{\mu_0}{2}+A_{\alpha x_0}\left[\tilde{V}(x_0)\right],$$

где $A_{\alpha x_0}\left[V_i(x_0)\right]$ и $A_{\alpha x_0}\left[V_e(x_0)\right]$ означают предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя потенциала $V(x)$ в точке $x_0\in\Gamma$ при $x\to x_0$ соответственно изнутри и извне границы $\Gamma$, а

$A_{\alpha x_0}\left[\hat{V}(x_0)\right]$ – прямое значение конормальной производной типа простого слоя $V(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$. Здесь точка $x_0 \in \Gamma$ – фиксированная точка границы $\Gamma$, $\mu_0 = \mu(x_0)$.

## §7. Сведение задач типа Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям теории потенциала

*Задача* $D_i$. Решение задачи $D_i$ будем искать в виде

$$U(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \nu(\xi) A_\alpha \left[\frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}}\right] \xi_p^{-\alpha} d\Gamma. \qquad (14)$$

$U(x)$ является $T_\alpha$ - гармонической функцией в области $D$ и непрерывна в $\bar{D}$. Плотность $\nu(\xi)$ – пока неопределенная функция. Ее найдем из требования, чтобы функция (14) удовлетворяла граничному условию (10) задачи $D_i$.

С этой целью подставим $U(x)$ в граничное условие (10) и, учитывая предельную формулу потенциала типа двойного слоя, получим

$$-\frac{\nu_0}{2} + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \nu(\xi) A_\alpha \left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right] \xi_p^{-\alpha} d\Gamma = f(\xi_0).$$

Таким образом, задача $D_i$ свелась к следующему интегральному уравнению

$$\nu_0 - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \nu(\xi) A_\alpha \left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right] \xi_p^{-\alpha} d\Gamma = -2f(\xi_0), \qquad (D_i)$$

где $\nu_0 = \nu(\xi_0)$.

*Задача* $D_e$. Решение задачи $D_e$ будем искать в виде

$$U(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \nu(\xi) A_\alpha \left[\frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}}\right] \xi_p^{-\alpha} d\Gamma. \qquad (15)$$

$U(x)$ является $T_\alpha$ - гармонической функцией в области $D_e = E_p^+ \setminus \bar{D}$, непрерывной в $\bar{D}_e$ и стремящейся к нулю на бесконечности. Плотность $\nu(\xi)$ – пока неопределенная функция. Ее найдем из требования, чтобы функция (15) удовлетворяла граничному условию (10) задачи $D_e$.

С этой целью подставим $U(x)$ в граничное условие (10) и, учитывая предельную формулу потенциала типа двойного слоя, получим

$$\frac{\nu_0}{2}+\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma}\nu(\xi)A_{\alpha}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]\xi_p^{-\alpha}d\Gamma=f(\xi_0).$$

Таким образом, задача $D_e$ свелась к следующему интегральному уравнению

$$\nu_0+\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma}\nu(\xi)A_{\alpha}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]\xi_p^{-\alpha}d\Gamma=2f(\xi_0), \qquad (D_e)$$

где $\nu_0=\nu(\xi_0)$ .

*Задача* $N_i$*.* Решение задачи $N_i$ будем искать в виде

$$U(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma}\mu(\xi)\frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}}\xi_p^{-\alpha}d\Gamma. \qquad (16)$$

$U(x)$ является $T_\alpha$ - гармонической функцией в области $D$ и непрерывна в $\bar{D}$. Плотность $\mu(\xi)$ – пока неопределенная функция. Ее найдем из требования, чтобы функция (16) удовлетворяла граничному условию (11) задачи $N_i$ .

С этой целью подставим $U(x)$ в граничное условие (11) и, учитывая предельное значение конормальной производной потенциала типа простого слоя, получим

$$\frac{\mu_0}{2}+\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma}\mu(\xi)A_{\alpha\xi_0}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]\xi_p^{-\alpha}d\Gamma=\varphi(\xi_0).$$

Таким образом, задача $N_i$ свелась к следующему интегральному уравнению

$$\mu_0+\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma}\mu(\xi)A_{\alpha\xi_0}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]\xi_p^{-\alpha}d\Gamma=2\varphi(\xi_0), \qquad (N_i)$$

где $\mu_0=\mu(\xi_0)$ .

*Задача* $N_e$*.* Решение задачи $N_e$ будем искать в виде

$$U(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma}\mu(\xi)\,\frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}}\,\xi_p^{-\alpha}d\Gamma \quad . \qquad (17)$$

$U(x)$ является $T_\alpha$ - гармонической функцией в области $D_e=\mathrm{E}_p^+\setminus\tilde{D}$, непрерывной в $\tilde{D}_e$ и стремящейся к нулю на бесконечности. Плотность $\nu(\xi)$ – пока неопределенная функция. Ее найдем из требования, чтобы функция (17) удовлетворяла граничному условию (11) задачи $N_e$.

С этой целью подставим $U(x)$ в граничное условие (11) и, учитывая предельное значение конормальной производной потенциала типа простого слоя, получим

$$-\frac{\mu_0}{2}+\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma}\mu(\xi)A_{\alpha\xi_0}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]\xi_p^{-\alpha}d\Gamma=\varphi(\xi_0) \quad .$$

Таким образом, задача $N_e$ свелась к следующему интегральному уравнению

$$\mu_0-\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{\Gamma}\mu(\xi)A_{\alpha\xi_0}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]\xi_p^{-\alpha}d\Gamma=2\varphi(\xi_0) \quad , \qquad (N_e)$$

где $\mu_0=\mu(\xi_0)$.

Интегральные уравнения ($D_i$),($D_e$),($N_i$),($N_e$) назовем интегральными уравнениями Фредгольма теории $T_\alpha$ - потенциалов. Эти уравнения обладают следующими общими свойствами:

1). Эти интегральные уравнения с ядром со слабой особенностью.

2). Ядра $A_\alpha\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]$ и $A_{\alpha\xi_0}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]$ получаются друг из друга заменой точки $\xi_0$ на точку $\xi$. Так как эти ядра вещественные, то ядра сопряженные. Значит интегральные уравнения ($D_i$) и ($N_e$), ($D_e$) и ($N_i$) – взаимосопряженные интегральные уравнения. Следовательно, для них справедливы все теоремы Фредгольма.

*1. Исследование первой пары сопряженных уравнений.*

Докажем, что интегральные уравнения, соответствующие задачам $D_i$ и $N_e$, разрешимы единственным образом при любых функциях

$f(\xi_0), \varphi(\xi_0) \in C_\alpha(\Gamma)$. С этой целью рассмотрим однородное интегральное уравнение задачи $N_e$

$$\mu_0 - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \mu(\xi) A_{\alpha\xi_0}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right] \xi_p^{-\alpha} d\Gamma = 0 \quad . \qquad (18)$$

Пусть $\overline{\mu}(\xi)$ – ненулевое решение этого уравнения. Тогда функция $\overline{U}(x)$ имеет вид

$$\overline{U}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \overline{\mu}(\xi) \frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}} \xi_p^{-\alpha} d\Gamma \quad . \qquad (19)$$

Уравнение (18) означает, что предельное значение извне $\Gamma$ конормальной производной потенциала (19) равно нулю, т.е.

$$A_{\alpha\xi_0}\left[\overline{U}(x)\right] = -\frac{\overline{\mu}_0}{2} + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \overline{\mu}(\xi) A_{\alpha\xi_0}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right] \xi_p^{-\alpha} d\Gamma \equiv 0 \quad . \qquad (20)$$

По теореме единственности для внешней задачи $N_e$ $\overline{U}(x) \equiv 0,\ x \in D_e$.

Так как потенциал простого слоя есть непрерывная функция во всем полупространстве, то

$$\overline{U}(x) \equiv 0,\ x \in \Gamma \ . \qquad (21)$$

Рассмотрим теперь потенциал $\overline{U}(x)$ в области $D$. В этой области функция $\overline{U}(x)$ $T_\alpha$ гармонична и в силу (21) обращается в нуль на границе $\Gamma$. По теореме единственности задачи $D_i$ $\overline{U}(x) \equiv 0,\ x \in D$. Тогда

$$A_{\alpha\xi_0}\left[\overline{U}(x)\right] = \frac{\overline{\mu}_0}{2} + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \overline{\mu}(\xi) A_{\alpha\xi_0}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right] \xi_p^{-\alpha} d\Gamma \equiv 0 \quad . \qquad (22)$$

Вычитая из равенства (22) равенство (20), получаем $\overline{\mu}(\xi) \equiv 0$, $x \in D$.

Таким образом, однородное интегральное уравнение (18) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма, интегральное уравнение ($N_e$) задачи $N_e$ однозначно разрешимо для любой функции $\varphi(\xi_0) \in C_\alpha(\Gamma)$. Таким образом, значение параметра $\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}}}$ – правильное для ядра $A_{\alpha\xi_0}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]$, по известной теореме Фредгольма, оно является правильным и для сопряженного ядра $A_{\alpha}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]$. Отсюда следует, что интегральное уравнение ( $D_i$ ) задачи $D_i$ однозначно разрешимо для функции $f(\xi_0)\in C_{\alpha}(\Gamma)$ .

Из разрешимости интегральных уравнений задач $D_i$ и $N_e$ следует, что разрешимы и сами задачи. Это приводит к следующим теоремам.

Теорема 10. Пусть $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p=0$ прямой угол, то задача $D_i$ для этой кривой разрешима при любых граничных данных $f(\xi_0)\in C_{\alpha}(\Gamma)$ , и решение можно представить в виде потенциала типа двойного слоя.

Теорема 11. Пусть $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p=0$ прямой угол, то задача $N_e$ для этой кривой разрешима при любых граничных данных $\varphi(\xi_0)\in C_{\alpha}(\Gamma)$, и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.

*2. Исследование второй пары сопряженных уравнений.*

Значение параметра $\lambda=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\pi^{\frac{p}{2}}}$, входящее в интегральные уравнения ( $D_e$ ) и ( $N_i$ )- характеристическое для каждого из ядер $A_{\alpha}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]$ и $A_{\alpha\xi_0}\left[\frac{1}{\rho_{\xi_0\xi}^{p-2}}\right]$. Следовательно, в силу рассуждений, аналогичных рассуждениям классической теории потенциалов имеют место следующие теоремы.

Теорема 12. Пусть $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p=0$ прямой угол и выполняется следующее условие

$$\int_{\Gamma}\varphi(\xi)\xi_p^{-\alpha}d\xi=0,$$

то задача $N_i$ для этой кривой разрешима при любых граничных данных $\varphi(\xi_0)\in C_{\alpha}(\Gamma)$ , и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.

Теорема 13. Пусть $\Gamma$ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то задача $D_e$ однозначно разрешима при любых граничных данных $f(\xi_0) \in C_\alpha(\Gamma)$ , и решение можно представить в виде

$$U(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int_\Gamma \nu(\xi) A_\alpha \left[\frac{1}{\rho_{x\xi}^{p-2}}\right] \xi_p^{-\alpha} d\Gamma + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}} \rho_{x0}^{p-2}} \int_\Gamma \nu(\xi) \xi_p^{-\alpha} d\Gamma,$$

где

$$\rho_{x0} = \sqrt{|x'|^2 + \left(\frac{x_p^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^2}.$$