УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНЫМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© Э.В.Чеботарева

В данной работе строятся фундаментальное решение и интегральное представление фундаментального решения для одного многомерного B-эллиптического уравнения с сильным характеристическим вырождением.

Ключевые слова: B-эллиптическое уравнение, характеристическое вырождение, формула Грина

Пусть E_p^{++} – четверть $x_p>0$, $x_{p-1}>0$ p-мерного евклидова пространства точек $x=(x'',x_p)$, $x'=(x_1,x_2,...,x_{p-2})$, $x''=(x',x_{p-1})$, Ω – конечная область в E_p^{++}, ограниченная гиперповерхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 гиперплоскостей $x_{p-1}=0$ и $x_p=0$ соответственно, $\Omega_e=E_p^{++}\setminus(\Omega\bigcup\Gamma)$.

Рассмотрим в E_p^{++} вырождающееся B-эллиптическое уравнение

$$T_\alpha(u(x))=\Delta_{x'}u+B_{x_{p-1}}u+x_p^\alpha\frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^\alpha\frac{\partial u}{\partial x_p}\right)=0, \quad (1)$$

где $\Delta_{x'}=\sum_{j=1}^{p-2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $B_{x_{p-1}}=\frac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2}+\frac{k}{x_{p-1}}\frac{\partial}{\partial x_{p-1}}$ – оператор Бесселя, $\alpha>1$, $k>0$ – постоянные, $p\geq 3$.

1. Формулы Грина

В характеристических координатах

$$\xi_i=x_i,\, i=\overline{1,p-1},\; \xi_p=\frac{x_p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

уравнение (1) приводится уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_{p-1}^2}+\frac{k}{\xi_{p-1}}\frac{\partial u}{\partial\xi_{p-1}}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_p^2}=0, \quad (2)$$

а область Ω переходит в бесконечную область.

Обозначим через $C_\alpha^m(\overline{\Omega})$ множество функций $f(x)$, m раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющих условию $f(x)=O(x_p^{(\alpha-1)(\gamma-2)})$ при $x_p\to 0$ (здесь $\gamma=p+k$), а через $C_B^2(\Omega)$ множество четных по x_{p-1} дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Пусть функции $u,v\in C_B^2(\Omega)\bigcap C_\alpha^1(\overline{\Omega})$. Непосредственными вычислениями можно проверить, что

$$\begin{gathered}vT_\alpha(u)x_{p-1}^k+\left(\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}+x_p^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_p}\frac{\partial v}{\partial x_p}\right)x_{p-1}^k=\\=\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_{p-1}^k v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+x_p^\alpha\frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_{p-1}^k x_p^\alpha v\frac{\partial u}{\partial x_p}\right).\end{gathered} \quad (3)$$

Умножая обе части тождества (3) на $x_p^{-\alpha}$, интегрируя по области Ω и пользуясь формулой Остроградского, получим

$$\begin{gathered}\int_\Omega vT_\alpha(u)x_{p-1}^k x_p^{-\alpha}dx+\\+\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}+x_p^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_p}\frac{\partial v}{\partial x_p}\right)x_{p-1}^k x_p^{-\alpha}dx=\\=\int_\Gamma vA_\alpha(u)x_{p-1}^k d\Gamma,\end{gathered} \quad (4)$$

где $A_\alpha=x_p^{-\alpha}\sum_{j=1}^{p-1}\cos(n,x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}+x_p^\alpha\cos(n,x_p)\frac{\partial}{\partial x_p}$ – конормальная производная, n – внешняя нормаль к границе Γ.

Поменяв в формуле (4) u и v местами, получим

$$\begin{gathered}\int_\Omega uT_\alpha(v)x_{p-1}^k x_p^{-\alpha}dx+\\+\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}+x_p^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_p}\frac{\partial v}{\partial x_p}\right)x_{p-1}^k x_p^{-\alpha}dx=\\=\int_\Gamma uA_\alpha(v)x_{p-1}^k d\Gamma.\end{gathered}$$

Вычитая данное равенство из (4), будем иметь

$$\begin{gathered}\int_\Omega[vT_\alpha(u)-uT_\alpha(v)]x_{p-1}^k x_p^{-\alpha}dx=\\=\int_\Gamma[vA_\alpha(u)-uA_\alpha(v)]x_{p-1}^k d\Gamma.\end{gathered} \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) называются соответственно первой и второй формулами Грина для оператора T_α.

Если функции u и v являются решениями уравнения (1), то из формулы (5) имеем

$$\iint_\Gamma \left[vA_\alpha(u) - uA_\alpha(v) \right] x_{p-1}^k d\Gamma = 0 . \qquad (6)$$

Полагая $v = 1$, получим

$$\int_\Gamma A_\alpha(u)\, x_{p-1}^k d\Gamma = 0 , \qquad (7)$$

т.е. интеграл от конормальной производной решения уравнения (1) по границе области равен нулю.

2. Фундаментальное решение

Известно [1], что фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в начале координат имеет вид

$$k(\xi) = A|\xi|^{2-\gamma},$$

где A – нормирующая константа.

Переходя к старым переменным, имеем

$$W(x) = B\rho_0^{2-\gamma},$$

где $\rho_0 = \sqrt{|x'| + \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 x_p^{1-\alpha}}$.

Определение: Функция $\mathcal{E}(x, x_0)$ называется фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $x_0 \in E_p^{++}$, если она удовлетворяет условиям:

1) для любой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(E_p^{++})$ такой, что $x_0 \in \operatorname{Supp}\varphi(x)$ имеет место равенство

$$\int_{E_p^{++}} \mathcal{E}(x, x_0)\, T_\alpha[\varphi(x)] x_{p-1}^k x_p^{-\alpha} dx = -\varphi(x_0) ;$$

2) $\mathcal{E}(x, x_0)$ является решением уравнения (1) во всех точках E_p^{++}, за исключением точки $x_0 \in E_p^{++}$.

Применим к $W(x)$ оператор обобщенного сдвига $T_x^{x_0}$:

$$\mathcal{E}(x, x_0) = BC_k \int_0^\pi \Big[|x' - x_0'|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1,0}^2 - $$
$$ - 2x_{p-1}x_{p-1,0}\cos\varphi + \left(\frac{x_p^{1-\alpha} - x_{p0}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2 \Big]^{\frac{2-\gamma}{2}} \sin^{k-1}\varphi d\varphi, \qquad (8)$$

где $C_k = \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$, $\gamma = p + k$.

Рассмотрим подинтегральную функцию

$$\Big[|x' - x_0'|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1,0}^2 - $$
$$ - 2x_{p-1}x_{p-1,0}\cos\varphi + \left(\frac{x_p^{1-\alpha} - x_{p0}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2 \Big]^{\frac{2-\gamma}{2}} =$$
$$ = \Big[|x' - x_0'|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1,0}^2 - 2x_{p-1}x_{p-1,0} + $$
$$ + 2x_{p-1}x_{p-1,0}(1 - \cos\varphi) + \left(\frac{x_p^{1-\alpha} - x_{p0}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2 \Big]^{\frac{2-\gamma}{2}} =$$
$$ = \left[\rho_{xx_0}^2 + 4x_{p-1}x_{p-1,0}\sin^2\frac{\varphi}{2} \right]^{\frac{2-\gamma}{2}},$$

где $\rho_{xx_0}^2 = |x' - x_0'|^2 + \left(\dfrac{x_p^{1-\alpha} - x_{p0}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2$.

Это означает, что

$$\int_0^\pi \Big[|x' - x_0'|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1,0}^2 - 2x_{p-1}x_{p-1,0}\cos\varphi + $$
$$ + \left(\frac{x_p^{1-\alpha} - x_{p0}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2 \Big]^{\frac{2-\gamma}{2}} \sin^{k-1}\varphi d\varphi =$$
$$ = \int_0^\pi \left[\rho_{xx_0}^2 + 4x_{p-1}x_{p-1,0}\sin^2\frac{\varphi}{2} \right]^{\frac{2-\gamma}{2}} \sin^{k-1}\varphi d\varphi =$$
$$ = (4x_{p-1}x_{p-1,0})^{\frac{2-\gamma}{2}} \int_0^\pi \left[\omega^2 + \sin^2\frac{\varphi}{2} \right]^{\frac{2-\gamma}{2}} \sin^{k-1}\varphi d\varphi,$$

где $\omega^2 = \dfrac{\rho_{xx_o}^2}{4x_{p-1}x_{p-1,0}}$.

Разность между данным интегралом и интегралом

$$(4x_{p-1}x_{p-1,0})^{\frac{2-\gamma}{2}} \int_0^\pi \varphi^{k-1} \left[\omega^2 + \frac{\varphi^2}{4} \right]^{\frac{2-\gamma}{2}} d\varphi$$

является регулярной функцией от (x', x_p) даже в точке (x_0', x_{p0}), когда $\omega = 0$. Обозначим ее через $\Phi(x, x_0)$. Таким образом,

$$\int_0^\pi \left[\rho_{xx_0}^2 + 4x_{p-1}x_{p-1,0}\sin^2\frac{\varphi}{2} \right]^{\frac{2-\gamma}{2}} \sin^{k-1}\varphi d\varphi =$$
$$ = (4x_{p-1}x_{p-1,0})^{\frac{2-\gamma}{2}} \int_0^\pi \varphi^{k-1} \left[\omega^2 + \frac{\varphi^2}{4} \right]^{\frac{2-\gamma}{2}} d\varphi + \Phi(x, x_0) .$$

Введя в последнем равенстве новую переменную $\varphi = 2\omega\xi$, получим

$$\int_0^{\pi}\left[\rho_{xx_0}^2+4x_{p-1}x_{p-1,0}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{2-\gamma}{2}}\sin^{k-1}\varphi d\varphi=$$

$$=\left(4x_{p-1}x_{p-1,0}\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\omega^{2-p}2^k\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\xi^{k-1}\left[1+\xi^2\right]^{\frac{2-\gamma}{2}}d\xi+\Phi(x,x_0)=$$

$$=\frac{\rho_{xx_o}^{2-p}}{\left(4x_{p-1}x_{p-1,0}\right)^{\frac{2-p}{2}}}\left(4x_{p-1}x_{p-1,0}\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}2^k\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\xi^{k-1}\left[1+\xi^2\right]^{\frac{2-\gamma}{2}}d\xi+\Phi(x,x_0)=$$

$$=\left(x_{p-1}x_{p-1,0}\right)^{\frac{-k}{2}}\rho_{xx_o}^{2-p}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\xi^{k-1}\left[1+\xi^2\right]^{\frac{2-\gamma}{2}}d\xi+$$

$$+\Phi(x,x_0)=\left(x_{p-1}x_{p-1,0}\right)^{\frac{-k}{2}}\rho_{xx_o}^{2-p}+R(x,x_0),$$

где $R(x,x_0)$ – регулярная в точке (x,x_0) функция.

Таким образом, (8) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x,x_0)&=BC_k\left(x_{p-1}x_{p-1,0}\right)^{\frac{-k}{2}}\rho_{xx_o}^{2-p}+\\&+\mathcal{E}^*(x,x_0)=\tilde{\mathcal{E}}(x,x_0)+\mathcal{E}^*(x,x_0),\end{aligned}\qquad(9)$$

где $\mathcal{E}^*(x,x_0)$ – регулярная в точке (x,x_0) функция.

Покажем, что $\mathcal{E}(x,x_0)$ является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке x_0. Ясно, что условие 2) определения выполняется для $\mathcal{E}(x,x_0)$. Проверим выполнимость первого условия.

Пусть функция $\varphi(x)\in C_0^{\infty}(E_p^{++})$, $x_0\in\operatorname{Supp}\varphi(x)$ – фиксированная точка, $S_{x_o\varepsilon}$ – сфера с центром в точке x_0 и радиуса ε, такого, что $S_{x_o\varepsilon}\subset E_p^{++}$, $S_R^{+}=\{x\in E_p^{++}:|x|=R, x_{p-1}>0, x_p>0\}$ – четверть сферы с центром в начале координат, такая что $\operatorname{Supp}\varphi\subset Q_R^{++}$, где Q_R^{++} – четверть шара, ограниченного S_R^{++}. Через $Q_{\varepsilon R}^{++}$ обозначим область, ограниченную S_R^{++}, $S_{x_o\varepsilon}$ частью гиперплоскостей $x_{p-1}=0$ и $x_p=0$. Применяя к функциям $\mathcal{E}(x,x_0)$ и $\varphi(x)$ вторую формулу Грина в области $Q_{\varepsilon R}^{++}$, получаем

$$\int_{Q_{\varepsilon R}^{++}}\left[\mathcal{E}(x,x_0)T_\alpha\left[\varphi(x)\right]-\varphi(x)T_\alpha\left[\mathcal{E}(x,x_0)\right]\right]x_{p-1}^k x_p^{-\alpha}dx=$$

$$=\int_{S_{x_0\varepsilon}}\left[\mathcal{E}(x,x_0)\bar{A}_\alpha\left[\varphi(x)\right]-\varphi(x)\bar{A}_\alpha\left[\mathcal{E}(x,x_0)\right]\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon},$$

где $\bar{A}_\alpha$ – внутренняя конормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$.

Так как в $Q_{\varepsilon R}^{++}$ $T_\alpha\left[\mathcal{E}(x,x_0)\right]=0$, то последнее равенство можно представить следующим образом

$$\begin{aligned}&\int_{Q_{\varepsilon R}^{++}}\mathcal{E}(x,x_0)T_\alpha\left[\varphi(x)\right]x_{p-1}^k x_p^{-\alpha}dx=\\&=\int_{S_{x_0\varepsilon}}\left[-\mathcal{E}(x,x_0)A_\alpha\left[\varphi(x)\right]+\varphi(x)A_\alpha\left[\mathcal{E}(x,x_0)\right]\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}=\\&=-\int_{S_{x_0\varepsilon}}\left[\mathcal{E}(x,x_0)A_\alpha\left[\varphi(x)\right]-\varphi(x)A_\alpha\left[\mathcal{E}(x,x_0)\right]\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}=\\&=J_\varepsilon+I'_\varepsilon+I''_\varepsilon,\end{aligned}\qquad(10)$$

где A_α – внешняя конормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$,

$$J_\varepsilon=-\int_{S_{x_0\varepsilon}}\left[\mathcal{E}^*(x;x_0)A_\alpha\left[\varphi(x)\right]-\right.$$

$$\left.-\varphi(x)A_\alpha\left[\mathcal{E}^*(x;x_0)\right]\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon},$$

$$I'_\varepsilon=-\int_{S_{x_0\varepsilon}}\tilde{\mathcal{E}}(x,x_0)A_\alpha\left[\varphi(x)\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon},$$

$$I''_\varepsilon=\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)A_\alpha\left[\tilde{\mathcal{E}}(x,x_0)\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}.$$

Ясно, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon=0,\ \lim_{\varepsilon\to0}I'_\varepsilon=0.\qquad(11)$$

Рассмотрим

$$I''_\varepsilon=\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)A_\alpha\left[\tilde{\mathcal{E}}(x,x_0)\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}=$$

$$=BC_k\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)A_\alpha\left[\left(x_{p-1}x_{p-1,0}\right)^{\frac{-k}{2}}\rho_{xx_o}^{2-p}\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}=,$$

$$=J'_\varepsilon+J''_\varepsilon$$

где

$$J'_\varepsilon=BC_k\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)\rho_{xx_o}^{2-p}A_\alpha\left[\left(x_{p-1}x_{p-1,0}\right)^{\frac{-k}{2}}\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon},$$

$$J''_\varepsilon=BC_k\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)\left(x_{p-1}x_{p-1,0}\right)^{\frac{-k}{2}}A_\alpha\left[\rho_{xx_o}^{2-p}\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}.$$

Ясно, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}J'_\varepsilon=0.$$

Рассмотрим

$$J''_\varepsilon=BC_k\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)\left(x_{p-1}x_{p-1,0}\right)^{\frac{-k}{2}}A_\alpha\left[\rho_{xx_o}^{2-p}\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}=$$

$$=-(p-2)BC_k x_{p-1,0}^{\frac{-k}{2}}\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)x_{p-1}^{\frac{k}{2}}\rho_{xx_o}^{1-p}A_\alpha\left[\rho_{xx_o}\right]dS_{x_0\varepsilon}=$$

$$=-(p-2)BC_k x_{p-1,0}^{\frac{-k}{2}}\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)x_{p-1}^{\frac{k}{2}}\rho_{xx_o}^{1-p}\times$$

$$\times\left[x_p^{-\alpha}\sum_{j=1}^{p-1}\cos(n,x_j)\frac{\partial\rho_{xx_0}}{\partial x_j}+x_p^{\alpha}\cos(n,x_p)\frac{\partial\rho_{xx_0}}{\partial x_p}\right]dS_{x_0\varepsilon}.$$

Так как поверхность $S_{x_0\varepsilon}$ определяется уравнением

$$r=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_i-x_{i_0})^2}=\varepsilon ,$$

то

$$\cos(n,x_i)=\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i-x_{i_0}}{r},\ i=\overline{1,p},$$

$$\frac{\partial\rho_{xx_0}}{\partial x_i}=\frac{x_j-x_{j0}}{\rho_{xx_0}},\ \ j=\overline{1,p-1},$$

$$\frac{\partial\rho_{xx_0}}{\partial x_p}=\frac{x_p^{1-\alpha}-x_{p_0}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)x_p^{\alpha}\rho_{xx_0}}.$$

Отсюда следует, что

$$J_{\varepsilon}''=-(p-2)BC_k\frac{1}{\varepsilon}x_{p-1,0}^{\frac{-k}{2}}\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)x_{p-1}^{\frac{k}{2}}\rho_{xx_o}^{-p}\times$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{p-1}(x_i-x_{i0})^2+x_p^{\alpha}(x_p-x_{p0})\frac{x_p^{1-\alpha}-x_{p0}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon}=$$

$$=-(p-2)BC_k\frac{1}{\varepsilon}x_{p-1,0}^{\frac{-k}{2}}\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)x_{p-1}^{\frac{k}{2}}\times$$

$$\times\frac{\sum_{j=1}^{p-1}(x_i-x_{i0})^2+x_p^{\alpha}(x_p-x_{p0})\frac{x_p^{1-\alpha}-x_{p0}^{1-\alpha}}{1-\alpha}}{\left(\sum_{j=1}^{p-1}(x_i-x_{i0})^2+\left(\frac{x_p^{1-\alpha}-x_{p0}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}}}x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon}.$$

В последнем равенстве, используя формулу Лагранжа

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0),\qquad(12)$$

где $0<\theta<1$, получаем

$$J_{\varepsilon}''=-(p-2)BC_k\frac{1}{\varepsilon}x_{p-1,0}^{\frac{-k}{2}}\int_{S_{x_0\varepsilon}}\varphi(x)x_{p-1}^{\frac{k}{2}}\times$$

$$\times\frac{\sum_{j=1}^{p-1}(x_i-x_{i0})^2+\left(\frac{x_p}{x_{p0}+\theta(x_p-x_{p0})}\right)^{\alpha}(x_p-x_{p0})^2}{\left(\sum_{j=1}^{p-1}(x_i-x_{i0})^2+(x_{p0}+\theta(x_p-x_{p0}))^{-2\alpha}(x_p-x_{p0})^2\right)^{\frac{p}{2}}}x_p^{-\alpha}dS_{x_0\varepsilon}.$$

Переходя к обобщенной сферической системе координат

$$\begin{cases}x_1=x_{1,0}+r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{p-2}\sin\varphi_{p-1},\\ x_2=x_{2,0}+r\cos\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{p-2}\sin\varphi_{p-1},\\ x_3=x_{3,0}+r\cos\varphi_2\ldots\sin\varphi_{p-2}\sin\varphi_{p-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{p-1}=x_{p-1,0}+r\cos\varphi_{p-2}\sin\varphi_{p-1},\\ x_p=x_{p,0}+r\cos\varphi_{p-1},\end{cases}\qquad(13)$$

($0\le r<\infty, 0\le\varphi_1<2\pi, 0\le\varphi_\nu<\pi, \nu=2,\ldots,p-1$) и учитывая, что элемент поверхности сферы представляется в виде

$$dS_{x_0\varepsilon}=\varepsilon^{p-1}\sin\varphi_2\ldots\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_1\ldots d\varphi_{p-1},$$

получаем

$$J_{\varepsilon}''=-(p-2)BC_k\frac{1}{\varepsilon}x_{p-1,0}^{\frac{-k}{2}}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{\pi}\sin\varphi_2 d\varphi_2\ldots\int_0^{\pi}\sin^{p-3}\varphi_{p-2}d\varphi_{p-2}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\varphi(x_{1_0}+\varepsilon\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{p-2}\sin\varphi_{p-1},\ldots,x_{p0}+\varepsilon\cos\varphi_{p-1})\times$$

$$\times(x_{p-1_0}+\varepsilon\cos\varphi_{p-2}\sin\varphi_{p-1})^{\frac{k}{2}}(x_{p0}+\varepsilon\cos\varphi_{p-1})^{-\alpha}\times$$

$$\times\frac{\varepsilon^2\sin^2\varphi_{p-1}+\left(\frac{x_{p0}+\varepsilon\cos\varphi_{p-1}}{x_{p0}+\theta\varepsilon\cos\varphi_{p-1}}\right)^{\alpha}\varepsilon^2\cos^2\varphi_{p-1}}{\left[\varepsilon^2\sin^2\varphi_{p-1}+(x_{p0}+\theta\varepsilon\cos\varphi_{p-1})^{-2\alpha}\varepsilon^2\cos^2\varphi_{p-1}\right]^{\frac{p}{2}}}\times$$

$$\times\varepsilon^{p-1}\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}.$$

Сократив на ε^{p+1} и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, имеем

$$J_{\varepsilon}''=-(p-2)BC_k\varphi(x_0)x_{p_0}^{-\alpha}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{\pi}\sin\varphi_2 d\varphi_2\ldots\int_0^{\pi}\sin^{p-3}\varphi_{p-2}d\varphi_{p-2}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p0}^{-\alpha}\cos^2\varphi_{p-1})^{\frac{p}{2}}},$$

где $J''=\lim_{\varepsilon\to 0}J_{\varepsilon}''$.

Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{\pi}\sin\varphi_2 d\varphi_2\ldots\int_0^{\pi}\sin^{p-3}\varphi_{p-2}d\varphi_{p-2}=\frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)},$$

имеем

$$J_{\varepsilon}''=-(p-2)BC_k\varphi(x_0)x_{p0}^{-\alpha}\times$$

$$\times\frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p0}^{-\alpha}\cos^2\varphi_{p-1})^{\frac{p}{2}}}.\qquad(14)$$

Преобразуем интеграл в (14):

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p0}^{-2\alpha}\cos^2\varphi_{p-1})^{\frac{p}{2}}}=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{p-2}\varphi_{p-1}d\varphi_{p-1}}{(\sin^2\varphi_{p-1}+x_{p0}^{-2\alpha}\cos^2\varphi_{p-1})^{\frac{p}{2}}}=$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(ctg\varphi_{p-1})}{(1+x_{p0}^{-2\alpha}ctg^2\varphi_{p-1})^{\frac{p}{2}}}=$$

$$= -2x_{p_0}^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\;\; x_{p0}^{-\alpha}ctg\varphi_{p-1}}{1+\;\; x_{p0}^{-\alpha}\,\mathrm{c}tg\varphi_{p-1}\;\;^{2}\;\;^{\frac{p}{2}}}.$$

Отсюда после замены

$$x_{p0}^{-\alpha}ctg\varphi_{p-1}=1,$$

$$\varphi_{p-1}=0, t=\infty,$$

$$\varphi_{p-1}=\frac{\pi}{2}, t=0,$$

получаем

$$I=-2x_{p0}^{\alpha}\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{1+t^2\;\;^{\frac{p}{2}}}=2x_{p0}^{\alpha}\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2\;\;^{\frac{p}{2}}}.$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}}{p+qx^{\nu}\;\;^{n+1}}=\frac{1}{\nu p^{n+1}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{\mu}{\nu}\right)}{\Gamma\;\; n+1},$$

$$0<\frac{\mu}{\nu}<n+1,$$

имеем

$$I=2x_{p0}^{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

Подставив полученное выражение в (24), будем иметь

$$J_{\varepsilon}''=-(p-2)BC_k\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\varphi\;\; x_0\;\; .$$

Потребуем, чтобы

$$B=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{(p-2)2\pi^{\frac{p}{2}}C_k}. \tag{15}$$

Таким образом, имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{x0\varepsilon}}\varphi(x)A_{\alpha}\left[\tilde{\mathcal{E}}\;\; x,x_0\;\;\right]x_{p-1}^{k}dS_{x_0\varepsilon}=-\varphi\;\; x_0\;\; . \tag{16}$$

Переходя к пределу в (10) с учетом (15), (16) получим

$$\int_{E_p^{++}}\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\; T_{\alpha}\left[\varphi\;\; x\;\;\right]x_{p-1}^{k}x_p^{-\alpha}dx=-\varphi\;\; x_0\;\; .$$

Таким образом, функция

$$\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\; =\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{(p-2)2\pi^{\frac{p}{2}}}\;\; x_{p-1}x_{p-1,0}\;\;^{\frac{-k}{2}}\rho_{xx_o}^{2-p}+$$

$$+\mathcal{E}^{*}\;\; x,x_0\;\; =\tilde{\mathcal{E}}\;\; x,x_0\;\; +\mathcal{E}^{*}\;\; x,x_0\;\; ,$$

является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в произвольной точке x_0.

3. Интегральное представление

Пусть функция $u\;\; x\;\; \in C_B^2\;\; \Omega\;\; \bigcap C_{\alpha}^1\;\; \bar{\Omega}$ является решением уравнения (1) в области Ω и точка $M_0\;\; x_0\;\; \in\Omega$. Рассмотрим сферу $S_{x_o\varepsilon}$ с центром в точке M_0 и радиуса ε, такого, что. $S_{x_o\varepsilon}\subset\Omega$. Обозначим через Ω_{ε} область, ограниченную координатными гиперплоскостями $x_{p-1}=0$, $x_p=0$, гиперповерхностью Γ и сферой $S_{x_0\varepsilon}$ ($\Omega_{\varepsilon}=\Omega\setminus\bar{S}_{x_0\varepsilon}$). Ясно, что фундаментальное решение $\mathcal{E}\;\; x,x_0$ принадлежит классу $u\;\; x\;\; \in C_B^2\;\; \Omega_{\varepsilon}\;\; \bigcap C_{\alpha}^1\;\; \bar{\Omega}_{\varepsilon}$. Применяя к функциям $\mathcal{E}\;\; x,x_0$ и $u(x)$ вторую формулу Грина в области Ω_{ε}, учитывая, что $T_{\alpha}\left[\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\;\right]=0$ и $T_{\alpha}\left[u\;\; x\;\;\right]=0$ в Ω_{ε}, получаем

$$\int_{\Gamma}\!\!\int\left[\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\; A_{\alpha}\;\; u(x)\;\; -\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\; A_{\alpha}\left[u\;\; x\;\;\right]\right]x_{p-1}^{k}d\Gamma=$$

$$=\int_{S_0\varepsilon}\left[\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\; A_{\alpha}\;\; u(x)\;\; -\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\; A_{\alpha}\left[u\;\; x\;\;\right]\right]x_{p-1}^{k}dS_0\varepsilon=$$

$$=I_{1\varepsilon}+I_{2\varepsilon}.$$

Ясно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_{1\varepsilon}=0,$$

Согласно формуле (16)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_{2\varepsilon}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{x0\varepsilon}}u(x)A_{\alpha}\left[\tilde{\mathcal{E}}\;\; x,x_0\;\;\right]x_{p-1}^{k}dS_{x_0\varepsilon}=u\;\; x_0\;\; .$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma}\!\!\int\left[\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\; A_{\alpha}\;\; u(x)\;\; -\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\; A_{\alpha}\left[u\;\; x\;\;\right]\right]x_{p-1}^{k}d\Gamma=$$

$$=u\;\; x_0\;\; .$$

Таким образом, для всякого решения $u\;\; x\;\; \in C_B^2\;\; \Omega\;\; \bigcap C_{\alpha}^1\;\; \bar{\Omega}$ уравнения (1) и для любой точки $x_0\in\Omega$ справедливо следующее интегральное представление

$$u\;\; x_0\;\; =\int_{\Gamma}\!\!\int\left[\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\; A_{\alpha}\;\; u(x)\;\; -\right. \tag{17}$$

$$\left.-\mathcal{E}\;\; x,x_0\;\; A_{\alpha}\left[u\;\; x\;\;\right]\right]x_{p-1}^{k}d\Gamma.$$

Из интегрального представления (17) вытекают следующие свойства решений уравнения (1):

1. Существуют решения $u(x)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющие условию

$$u\;\; x\;\; =O\;\; x_p^{\alpha-1\;\;\gamma-2}\quad \text{при } x_p\to 0. \tag{18}$$

2. Существуют решения $u(x)$ уравнения (1) в области $\Omega_e = E_p^{++} \setminus \overline{\Omega}$, удовлетворяющие условию

$$u\;x\;=O\;\rho_0^{-\;p-2} \quad \text{при} \quad r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2}\to\infty, \tag{19}$$

где $\rho_0^2 = \left|x'\right| + \dfrac{1}{1-\alpha\;^2}\,x_p^{2\;1-\alpha}$.

4. Принцип максимума

Теорема (принцип максимума). Если $u\;x\;\in C_B^2\;\Omega\;\bigcap C_\alpha^1\;\overline{\Omega}$ – решение уравнения (1), то функция $u(x)$ достигает своего положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значений на границе Γ, если она не равна нулю.

Доказательство: Предположим, что функция $u\;x\;\in C_B^2\;\Omega\;\bigcap C_\alpha^1\;\overline{\Omega}$ удовлетворяет уравнению (1) и достигает своего положительного наибольшего значения $u(x_0)$ в некоторой внутренней точке $M_0\;x_0$ области Ω. Тогда существует δ-окрестность точки x_0, в которой $u(x)<u(x_0)$, при $x\neq x_0$, и $u(x)>0$. Пусть $S_{x_0\delta}$ – сфера с центром в точке x_0 и радиусом δ. Полагая в интегральном представлении (17) решения $u(x)$ $\Gamma = S_{x_0\delta}$, получим

$$u(x_0)=\int\limits_{S_{x_0\delta}} \mathcal{E}\;x,x_0\;\;A_\alpha\left[u(x)\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\delta} - \\ -\int\limits_{S_{x_0\delta}} u(x)A_\alpha\left[\mathcal{E}\;x,x_0\;\right]x_{p-1}^k dS_{x_0\delta} = I_1+I_2. \tag{20}$$

Т.к. $u(x)>0$ и $\mathcal{E}(x,x_0)>0$, а конормаль A_α является внешней по отношению к сфере $S_{x_0\delta}$, то $A_\alpha\;u(x)\;<0$ и $A_\alpha\;\mathcal{E}(\xi,x_0)\;<0$, и, следовательно, $I_1<0$ и $I_2>0$. При $\delta\to 0$ I_1 возрастая стремится к нулю, а I_2 возрастая стремится к $u(x_0)$. Таким образом, $I_1<0$ и $I_2<u(x_0)$. Учитывая это, и заменяя в (20) $u(x)$ на $u(x_0)$, получим бессмысленное неравенство

$$u(x_0)<I_2<u(x_0)\,. \tag{21}$$

Следовательно, функция $u(x)$ может достигнуть своего положительного наибольшего значения лишь на границе Γ.

С помощью перехода от u к $-u$ доказывается второе утверждение теоремы. При этом наименьшее отрицательное значение переходит в наибольшее положительное.

Следствие: Если функция $u\;x\;\in C_B^2\;\Omega\;\bigcap C_\alpha^1\;\overline{\Omega}$ является решением уравнения (1), то $\left|u(x)\right|\le\max\limits_{\xi\in\Gamma}\left|u(\xi)\right|$, $x\in\Omega$. В частности, если $u\;x\;\big|_\Gamma=0$, то $u(x)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

* * * * * * * * * *

1. Киприянов И.А, Кононенко В.И. Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений.// Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т.3. – №1. – С.114-129.

THE INTEGRAL REPRESETATION OF THE SOLUTION OF THE B-ELLIPTICAL EQUATION WINT STRONG CHARACTERISTIC DEGENERATION

E.V.Chebotareva

Fundamental solution and integral representation for one multidimensional B-elliptical equation with strong characteristic degeneration are built in the given research work.

Key words: B-elliptical equation, character degeneration, Green's formula

* * * * * * * * * *

Чеботарева Эльвира Валерьевна – аспирант кафедры математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

E-mail: mf@tggpu.ru