Н.В.Чепанова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ-ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ МЕТОДОМ РИМАНА.

Рассмотрим уравнение

$$L\left(u\right) = y^{m}\,\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} - B_{y} u = 0, \quad m > 1, \tag{1}$$

где $B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}$ - оператор Бесселя, 0 < k < 1.

Уравнение (1) в характеристических координатах

$\xi = x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}$, $\eta = x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}$ приводится к уравнению Эйлера-Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{k}{(m+2)(\eta - \xi)}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0. \quad (2)$$

Обозначим через D область, ограниченную характеристикой $x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 0$ и осью Ox.

Постановка задачи Коши-Гурса: найти решение уравнения (1) в области D, непрерывное в $\overline{D}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u\big|_S = \varphi(x), \; y^k \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0, \quad (3)$$

где через S обозначена характеристическая кривая $x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 0$.

Будем решать задачу Коши-Гурса методом функции Римана. Уравнение (1) запишем в виде $L(u) = y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^{-k} \frac{\partial}{\partial y}\left(y^k \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$

Умножая это уравнение на y^k, получаем

$$T(u) = y^k L(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^{k+m} \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^k \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (4)$$

Ясно, что оператор $T(u)$ является самосопряжённым оператором. Заменяя в уравнении (4) u на v, получаем

$$T(v)=y^k L(v)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{k+m}\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(y^k\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \tag{5}$$

Умножая уравнение (4) на функцию v, а уравнение (5) на u, запишем их в следующем виде

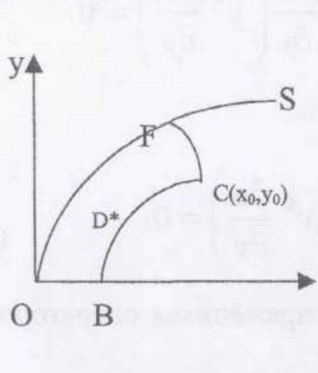
$$y^k vL(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{k+m}u\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[vy^k\frac{\partial u}{\partial y}\right]-$$
$$-y^{k+m}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+y^k\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{6}$$

$$y^k uL(v)=\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{k+m}v\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[uy^k\frac{\partial v}{\partial y}\right]-$$
$$-y^{k+m}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+y^k\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{7}$$

Вычитая (7) из (6), получаем

$$y^k\left[vL(u)-uL(v)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{k+m}u\right)-u\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{k+m}v\right)\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[vy^k\frac{\partial u}{\partial y}-uy^k\frac{\partial v}{\partial y}\right]. \tag{8}$$

Пусть $C(x_0,y_0)$ - произвольная точка области D. Обозначим через D^* характеристическую область OBCF (рис. 1), ограниченную характеристиками OF, BC, CF и отрезком OB оси Ox. Интегрируя тождество (8) по области D^* и используя формулу Грина, находим



$$\iint_{D^*}\left[vL(u)-uL(v)\right]y^k\,dxdy=$$
$$=\int_{OB+BC+CF+FO}\left[vy^k\frac{\partial u}{\partial y}-uy^k\frac{\partial v}{\partial y}\right]dx+$$
$$+\left[vy^{k+m}\frac{\partial u}{\partial x}-uy^{k+m}\frac{\partial v}{\partial x}\right]dy. \tag{9}$$

Так как вдоль OB меняется только x и $y^k = 0$, то при интегрировании по OB, учитывая второе условие из (3), имеем

$$\int_{OB}\left[v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right]y^k dx = 0 . \qquad (10)$$

Подынтегральную функцию в (9) можно переписать в виде

$$\left[vy^k\frac{\partial u}{\partial y} - uy^k\frac{\partial v}{\partial y}\right]dx + \left[vy^{k+m}\frac{\partial u}{\partial x} - uy^{k+m}\frac{\partial v}{\partial x}\right]dy =$$

$$= \left[\left(y^k uv\right)_y - 2y^k uv_y - ky^{k-1}uv\right]dx +$$

$$+\left[\left(y^k uv\right)_x + y^k u_x v\left(y^m - 1\right) - y^k uv_x\left(y^m + 1\right)\right]dy. \qquad (11)$$

Принимая во внимание, что $dy = y^{-\frac{m}{2}}dx$ на BC и FO, $dy = -y^{-\frac{m}{2}}dx$ на CF и учитывая (11), получим

$$\int_{BC}\left[vy^k\frac{\partial u}{\partial y} - uy^k\frac{\partial v}{\partial y}\right]dx + \left[vy^{k+m}\frac{\partial u}{\partial x} - uy^{k+m}\frac{\partial v}{\partial x}\right]dy =$$

$$= \int_B^C d\left(y^k uv\right) - \int_B^C\left[2y^k uv_y + ky^{k-1}uv\right]dx + \qquad (12)$$

$$+\left[y^k uv_x\left(y^m + 1\right) - y^k u_x v\left(y^m - 1\right)\right]dy =$$

$$= \left(y^k uv\right)_C - \left(y^k uv\right)_B - \int_B^C\left[2v_y + \frac{k}{y}v + y^{-\frac{m}{2}}\left(y^m + 1\right)v_x\right]y^k u dx +$$

$$+\int_B^C y^{k-\frac{m}{2}}\left(y^m - 1\right)u_x v dx.$$

И аналогично

$$\int_{CF}\left[vy^k\frac{\partial u}{\partial y} - uy^k\frac{\partial v}{\partial y}\right]dx + \left[vy^{k+m}\frac{\partial u}{\partial x} - uy^{k+m}\frac{\partial v}{\partial x}\right]dy =$$

$$=-\int_C^F d\left(y^k uv\right)+\int_C^F\left[2y^k uv_y+ky^{k-1}uv\right]dx+$$

$$+\left[y^k uv_x\left(y^m+1\right)-y^k u_x v\left(y^m-1\right)\right]dy=-\left(y^k uv\right)_F+$$

$$+\left(y^k uv\right)_C+\int_C^F\left[2v_y+\frac{k}{y}v-y^{-\frac{m}{2}}\left(y^m+1\right)v_x\right]y^k u dx+$$

$$+\int_C^F y^{k-\frac{m}{2}}\left(y^m-1\right)u_x v dx. \tag{13}$$

$$\int_{FO}\left[vy^k\frac{\partial u}{\partial y}-uy^k\frac{\partial v}{\partial y}\right]dx+\left[vy^{k+m}\frac{\partial u}{\partial x}-uy^{k+m}\frac{\partial v}{\partial x}\right]dy=$$

$$=\int_F^O\left[-\left(y^k uv\right)_y+2y^k u_y v+ky^{k-1}uv\right]dx+$$

$$+\left[-\left(y^k uv\right)_x+y^k u_x v\left(y^m+1\right)-y^k v_x u\left(y^m-1\right)\right]dy=-\left(y^k uv\right)_O+$$

$$+\left(y^k uv\right)_F+\int_F^O\left[2u_y+\frac{k}{y}u-y^{-\frac{m}{2}}\left(y^m+1\right)u_x\right]y^k v dx+$$

$$+\int_F^O y^{k-\frac{m}{2}}\left(y^m-1\right)uv_x dx. \tag{14}$$

Учитывая (10), (12) - (14), из формулы (9) получаем

$$\left(y^k uv\right)_C=\int_B^C\left[v_y+\frac{\frac{k}{2}}{y}v+y^{-\frac{m}{2}}\left(y^m+1\right)v_x\right]y^k u dx-$$

$$-\int_C^F\left[v_y+\frac{\frac{k}{2}}{y}v-y^{-\frac{m}{2}}\left(y^m+1\right)v_x\right]y^k u dx-$$

$$-\int_F^O\left[u_y+\frac{k/2}{y}u-y^{-\frac{m}{2}}\left(y^m+1\right)u_x\right]y^k v dx+$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{D^*}\left[vL(u)-uL(v)\right]y^k dxdy-\int_B^C y^{k-\frac{m}{2}}\left(y^m-1\right)u_x v dx- \tag{15}$$

$$-\int_C^F y^{k-\frac{m}{2}}\left(y^m-1\right)u_x v dx-\int_F^O y^{k-\frac{m}{2}}\left(y^m-1\right)u v_x dx.$$

Пусть u – решение задачи Коши-Гурса (1), (3), а v – какое-нибудь решение сопряжённого уравнения (5). Тогда в формуле (15) слагаемое $\frac{1}{2}\iint_{D^*}\left[vL(u)-uL(v)\right]y^k dxdy$ тождественно равно нулю.

Интегрируя по частям последние три интеграла в формуле (15), можем переписать её следующим образом

$$\left(y^k uv\right)_C=\int_B^C\left[v_y+\frac{k/2}{y}v+y^{\frac{m}{2}}v_x\right]y^k u dx-$$

$$-\int_C^F\left[v_y+\frac{k/2}{y}v-y^{\frac{m}{2}}v_x\right]y^k u dx-\int_F^O\left[u_y+\frac{k/2}{y}u-y^{\frac{m}{2}}u_x\right]y^k v dx. \tag{16}$$

В интегралы

$$\int_B^C\left[v_y+\frac{k/2}{y}v+y^{\frac{m}{2}}v_x\right]y^k u dx,\quad \int_C^F\left[v_y+\frac{k/2}{y}v-y^{\frac{m}{2}}v_x\right]y^k u dx$$

входят неизвестные значения u. Поэтому необходимо выбрать такое решение уравнения (5), которое удовлетворяло бы следующим трём условиям:

1) $v_y+\frac{k/2}{y}v+y^{\frac{m}{2}}v_x=0$ на характеристике BC,

2) $v_y+\frac{k/2}{y}v-y^{\frac{m}{2}}v_x=0$ на характеристике CF,

3) $v=1$ в точке C.

Учитывая условия 1) – 3), из формулы (16) имеем

$$\left(y^k u\right)_C = -\int_F^O \left[u_y + \frac{k/2}{y} u - y^{\frac{m}{2}} u_x \right] y^k v dx. \qquad (17)$$

Уравнение (1) в характеристических координатах приводится к уравнению Эйлера-Дарбу (2), для которого функция Римана имеет вид

$$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \frac{(\eta-\xi)^{\frac{2k}{m+2}}}{(\eta_0-\xi)^{\frac{k}{m+2}}(\eta-\xi_0)^{\frac{k}{m+2}}} \bullet F\left(\frac{k}{m+2},\frac{k}{m+2},1;\sigma\right),$$

где F – гипергеометрическая функция и $\sigma = \dfrac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\eta-\xi_0)}$.

Возвращаясь к старым переменным x и y, получаем функцию Римана для уравнения (5)

$$v(x,y,x_0,y_0) = \frac{\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{2k}{m+2}} y_0^k F\left(\frac{k}{m+2},\frac{k}{m+2},1;\sigma\right)}{\left(x_0+\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}-x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^{\frac{k}{m+2}}\left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}-x_0+\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^{\frac{k}{m+2}}}$$

$$\sigma = \frac{\left(x-\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}-x_0+\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)\left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}-x_0-\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)}{\left(x-\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}-x_0-\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)\left(x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}-x_0+\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)}. \qquad (18)$$

Подставляя (18) в формулу (17) и учитывая первое граничное условие из (3), получаем

$$\left(y^k u\right)_C = -\int_F^O \frac{\left[\frac{k/2}{y}\varphi(x) - y^{\frac{m}{2}}\varphi'(x)\right]\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{2k}{m+2}}}{\left(x_0 + \frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}} - x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^{\frac{k}{m+2}}} \times$$

$$\times \frac{y_0^k y^k F\left(\frac{k}{m+2}, \frac{k}{m+2}, 1; \sigma\right)}{\left(x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} - x_0 + \frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^{\frac{k}{m+2}}} dx$$

или

$$\left(y^k u\right)_C = y_0^k 2^{\frac{2k}{m+2}} \int_0^{\frac{x_0}{2} + \frac{1}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}} \frac{\left[\frac{k}{2}\left(\frac{2}{(m+2)t}\right)^{\frac{2}{m+2}} \varphi(t) - \left(\frac{m+2}{2}t\right)^{\frac{m}{m+2}} \varphi'(t)\right] t^{\frac{2k}{m+2}}}{\left(x_0 + \frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^{\frac{k}{m+2}} \left(2t - x_0 + \frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^{\frac{k}{m+2}}} \times$$

$$\times F\left(\frac{k}{m+2}, \frac{k}{m+2}, 1; \sigma\right) dt.$$

Откуда

$$u(x,y) = 2^{\frac{2k}{m+2}} \int_0^{\frac{x}{2} + \frac{1}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}} \frac{\left[\frac{k}{2}\left(\frac{2}{(m+2)t}\right)^{\frac{2}{m+2}} \varphi(t) - \left(\frac{m+2}{2}t\right)^{\frac{m}{m+2}} \varphi'(t)\right] t^{\frac{2k}{m+2}}}{\left(x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^{\frac{k}{m+2}} \left(2t - x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)^{\frac{k}{m+2}}} \times$$

$$\times F\left(\frac{k}{m+2},\frac{k}{m+2},1;\sigma\right)dt \tag{19}$$

$$\sigma=\frac{\left(-x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)\left(2t-x-\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)}{\left(-x-\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)\left(2t-x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right)}.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция $u(x,y)$, определяемая равенством (19), является решением задачи (1), (3), если $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка включительно.

Литература

[1] Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.; 1966.-292с.