УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ С ВЕСОВЫМ УСЛОВИЕМ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© И.Т.Назипов

Изучается задача Трикоми для уравнения (E_B) в области D. Дается постановка задачи и доказывается единственность ее решения.

Введение. Данная работа посвящена доказательству существования единственного решения задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа вида

$$E_B(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + sign\ y B_y u = 0 \qquad (E_B)$$

где $B_y = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{k}{y}\dfrac{\partial}{\partial y}$ - оператор Бесселя, $0 < k < 1$.

При $y > 0$ уравнение (E_B) является эллиптическим, а при $y < 0$ - гиперболическим, $y = 0$ - параболическая линия.

Уравнение (E_B) при $y < 0$ имеет два семейства вещественных характеристик, которые определяются уравнениями $x - y = C_1$, $x + y = C_2$.

Пусть Γ - спрямляемая жорданова кривая с концами в точках $O(0,0)$ и $A(1,0)$, лежащая в первой четверти координатной плоскости. Обозначим через D область, ограниченную кривой Γ и характеристиками OB: $x + y = 0$ и AB: $x - y = 1$. Части области D, в которых $y > 0$ и $y < 0$, обозначим соответственно через D^+ и D^-. Поскольку уравнение (E_B) эллиптично в D^+ и гиперболично в D^-, то их будем называть соответственно эллиптической и гиперболической частями области D, а эту последнюю - смешанной областью. Кроме того, через Γ_0 будем обозначать отрезок OA.

Постановка задачи Трикоми и единственность ее решения. *Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x,y) \in C^2\left(D^+ \cup D^-\right) \cap C\left(\overline{D}\right), \quad |y|^k u_y \in C(D); \qquad (1)$$

$$E_B(u) = 0,\ (x,y) \in D^+ \cup D^-; \qquad (2)$$

$$u|_\Gamma = \phi(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in \Gamma; \qquad (3)$$

$$u|_{OB} = u|_{y=-x} = 0;\ 0 \le x \le \frac{1}{2};\ \phi(\xi,\eta) \in C(\Gamma). \qquad (4)$$

Из условия (1) следует, что на линии сингулярности $y = 0$ уравнения (E_B) выполняются условия склеивания:

$$u(x,0-) = u(x,0+),\ 0 \le x \le 1, \qquad (5)$$

$$\lim_{y\to 0+} y^k \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \lim_{y\to 0-} |y|^k \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \qquad (6)$$

Нетрудно доказать, что имеет место следующая

Теорема 1. *Задача Трикоми не может иметь более одного решения.*

Положим,

$$u(x,0-) = u(x,0+) = \mu(x); \qquad (7)$$

$$\lim_{y\to 0-} |y|^k \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to 0+} y^k \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x); \qquad (8)$$

$$\Box_B u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{k}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ (x,y) \in D^-; \qquad (9)$$

$$\Box_B u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ (x,y) \in D^+. \qquad (10)$$

Исследование уравнения (E_B) в гиперболической полуплоскости. Уравнение (9) в характеристических координатах $\xi = x - y$, $\eta = x + y$ преобразуется в уравнение Эйлера-Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{k}{2(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Известно [1], что общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(\xi,\eta) = (\eta - \xi)^{1-k} \int_0^1 \frac{\Phi\left[\xi + (\eta - \xi)t\right]}{t^{\frac{k}{2}}(1-t)^{\frac{k}{2}}} dt + \int_0^1 \frac{\Psi\left[\xi + (\eta - \xi)t\right]}{t^{1-\frac{k}{2}}(1-t)^{1-\frac{k}{2}}} dt.$$

Возвращаясь к переменным x и y, имеем

$$u(x,y)=2^{1-k}|y|^{1-k}\int_0^1\frac{\Phi[x-y+2yt]}{t^{\frac{k}{2}}(1-t)^{\frac{k}{2}}}dt+ \\ +\int_0^1\frac{\Psi[x-y+2yt]}{t^{1-\frac{k}{2}}(1-t)^{1-\frac{k}{2}}}dt \qquad (11)$$

Здесь Φ и Ψ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (9) при начальных условиях

$$u|_{y=0}=\mu(x),\ 0\le x\le 1; \\ \lim_{y\to 0-}|y|^k u_y=\nu(x),\ 0<x<1. \qquad (12)$$

С помощью общего решения (11) уравнения (9) легко доказывается, что задача Коши (9), (12) однозначно разрешима и решение может быть представлено в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{\gamma_1}|y|^{1-k}\int_0^1\frac{\nu(x-y+2yt)}{t^{\frac{k}{2}}(1-t)^{\frac{k}{2}}}dt+ \\ +\frac{1}{\gamma_2}\int_0^1\frac{\mu(x-y+2yt)}{t^{1-\frac{k}{2}}(1-t)^{1-\frac{k}{2}}}dt \qquad (13)$$

где $\gamma_1=\dfrac{\Gamma^2\left(1-\dfrac{k}{2}\right)}{\Gamma(1-k)}$, $\gamma_2=\dfrac{\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)}{\Gamma(k)}$.

Исследование уравнения (E_B) в эллиптической полуплоскости. С помощью замены переменных по формулам $\xi=x$, $\eta=\left(\dfrac{y}{1-k}\right)^{1-k}$ уравнение (10) приводится к вырождающемуся эллиптическому уравнению

$$\eta^m\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0, \qquad (14)$$

где $m=\dfrac{2k}{1-k}$. Переходя к переменным x, y в известном из [1] фундаментальном решении уравнения (14), получаем

$$\varepsilon(x,y;x_0,y_0)=A\left(r_1^2\right)^{-\frac{k}{2}}F\left(\frac{k}{2},\frac{k}{2},k;1-\sigma\right), \qquad (15)$$

где

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2\end{matrix}\right\}=(x-x_0)^2+(y\mp y_0)^2,\ \sigma=\frac{r^2}{r_1^2}.$$

С помощью известной формулы преобразования гипергеометрических функций фундаментальное решение (15) при $y>0$, $y_0>0$ и малых значениях r можно представить в виде

$$\varepsilon(x,y;x_0,y_0)=A\frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)}\left(r_1^2\right)^{-\frac{k}{2}}\ln\frac{1}{r}+ \\ +\tilde{\varepsilon}(x,y;x_0,y_0) \qquad (16)$$

Пусть Ω - произвольная область в $E_2^+=\{(x,y)\in E_2 : y>0\}$ с границей γ и $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ - решение уравнения (10) в области Ω. Тогда для этого решения при $A=\dfrac{2^k\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)}{2\pi\Gamma(k)}$ имеет место интегральное представление

$$u(x_0,y_0)=\int_\gamma\left[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)\frac{\partial u}{\partial n}- \right. \\ \left. -u\frac{\partial}{\partial n}\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)\right]\eta^k d\Gamma. \qquad (17)$$

С помощью этого интегрального представления и граничного принципа экстремума (теорема Жиро) можно доказать, что имеет место следующая

Теорема 2 (Принцип экстремума). *Если тождественно не равная нулю функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям:*

$$u\in C^2(D^+)\cap C(\overline{D^+}),\ (y^k u_y)\in C(D^+\cup\Gamma_0);$$

$$\square_B u=0,\ (x,y)\in D^+;\ \lim_{y\to 0}y^k u_y=0,$$

то она принимает положительное наибольшее и отрицательное наименьшее значения на границе Γ.

Задача N_k. *Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y)\in C^2(D^+)\cap C(\overline{D^+}), \\ (y^k u_y)\in C(D^+\cup\Gamma_0); \qquad (18)$$

$$\square_B u=0,\ (x,y)\in D^+; \qquad (19)$$

$$u|_\Gamma=\phi(\xi,\eta),\ (\xi,\eta)\in\Gamma, \qquad (20)$$

$$\lim_{y\to 0}y^k u_y=\nu(x). \qquad (21)$$

Единственность решения задачи N_k следует из теоремы о принципе экстремума.

Покажем, что в задаче N_k можно ограничиться случаем, когда $\nu(x)=0$. Для этого с помощью фундаментального решения $\varepsilon(\xi,\eta;x,y)$ образуем решение уравнения (10) $\vartheta(x,y)=-\int_{\Gamma_0}\nu(\xi)\varepsilon(\xi,0;x,y)d\xi$.

Нетрудно доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}} y^k u_y = \nu(x_0)$, $0 < x_0 < 1$.

Решение задачи N_k ищем в виде $u(x,y) = \vartheta(x,y) + U(x,y)$ где $U(x,y)$ есть решение задачи N_k в следующей постановке: *найти функцию* $U(x,y)$, *удовлетворяющую условиям*

$$U(x,y) \in C^2(D^+) \cap C(\overline{D^+}), \quad (y^k U_y) \in C(D^+ \cup \Gamma_0); \tag{22}$$

$$\square_B U = 0,\ (x,y) \in D^+; \tag{23}$$

$$(y^k U_y)_{y=0} = 0. \tag{24}$$

$$U|_\Gamma = \phi(\xi,\eta) - \vartheta|_\Gamma = \phi_1(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in \Gamma. \tag{25}$$

Теперь докажем существование решения задачи N_k (22)-(25). Для этого введем потенциал двойного слоя

$$W(x,y) = \int_\Gamma \sigma(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial n} \varepsilon(\xi,\eta;x,y) \eta^k d\Gamma \tag{26}$$

Из представления (16) следует, что фундаментальное решение $\varepsilon(\xi,\eta;x,y)$ имеет логарифмическую особенность. Поэтому потенциал двойного слоя (26) на границе Γ ведет себя так же, как логарифмический потенциал двойного слоя, т.е. имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* Γ *– кривая Ляпунова и образует с осью абсцисс прямой угол. Тогда, если* $\sigma \in C(\Gamma)$, *то для потенциала двойного слоя (26) справедливы следующие предельные соотношения:*

$$W_i(x_0,y_0) = -\frac{1}{2}\sigma_0 + \overset{\square}{W}(x_0,y_0), \quad W_e(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\sigma_0 + \overset{\square}{W}(x_0,y_0), \tag{27}$$

где $W_i(x_0,y_0)$ *и* $W_e(x_0,y_0)$ *означают предельные значения* $W(x,y)$ *в точке* $(x_0,y_0) \in \Gamma$ *при* $(x,y) \to (x_0,y_0)$ *соответственно изнутри и извне* Γ, *а* $\overset{\square}{W}(x_0,y_0)$ *- прямое значение потенциала (26) в точке* $(x_0,y_0) \in \Gamma$, $\sigma_0 = \sigma(x_0,y_0)$.

Решение задачи N_k (22)-(25) ищем в виде

$$U(x,y) = \int_\Gamma \sigma(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial n} \varepsilon(\xi,\eta;x,y) \eta^k d\Gamma. \tag{28}$$

Ясно, что функция (28) удовлетворяет условиям (22)-(24). Неизвестную плотность $\sigma(\xi,\eta)$ найдем из требования, чтобы функция (28) удовлетворяла граничному условию (25). Подставляя ее в это граничное условие, с учетом формулы скачка (27), получаем

$$\sigma(x,y) - 2\int_\Gamma \sigma(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial n} \varepsilon(\xi,\eta;x,y) \eta^k d\Gamma = -2\phi_1(x,y) \tag{29}$$

Однозначная разрешимость интегрального уравнения (29) следует из единственности решения внутренней и внешней задачи N_k. Если интегральное уравнение задачи N_k разрешимо, то разрешима сама задача N_k. Рассмотрим случай, когда $\phi_1(\xi,\eta) = -\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)$, где $M_0(x_0,y_0) \in D^+$ – фиксированная точка. В этом случае неизвестная функция U зависит также от x_0 и y_0. Ее обозначим через $q(x,y;x_0,y_0)$.

Итак, *нужно найти функцию* $q(x,y;x_0,y_0)$, *удовлетворяющую условиям*

$$q(x,y;x_0,y_0) \in C^2(D^+) \cap C(\overline{D^+}),$$

$$(y^k q_y) \in C(D^+ \cup \Gamma_0);\ \square_B q = 0,\ (x,y) \in D^+;$$

$$(y^k q_y)_{y=0} = 0;\ q|_\Gamma = -\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0),\ (\xi,\eta) \in \Gamma.$$

Решение этой задачи может быть представлено в виде потенциала двойного слоя

$$q(x,y;x_0,y_0) = \int_\Gamma \sigma(\xi,\eta;x_0,y_0) \frac{\partial}{\partial n} \varepsilon(\xi,\eta;x,y) \eta^k d\Gamma \tag{30}$$

Повторив вышеприведенное рассуждение, получим интегральное уравнение для неизвестной плотности $\sigma(\xi,\eta;x_0,y_0)$:

$$\sigma(x,y;x_0,y_0) - 2\int_\Gamma \sigma(\xi,\eta;x_0,y_0) \frac{\partial}{\partial n} \varepsilon(\xi,\eta;x,y) \eta^k d\Gamma = 2\varepsilon(x,y;x_0,y_0) \tag{31}$$

В силу вышеуказанного интегральное уравнение (31) однозначно разрешимо, и его решение можно записать в виде

$$\sigma(x,y;x_0,y_0) = 2\varepsilon(x,y;x_0,y_0) + 4\int_\Gamma R(\xi,\eta;x,y) \varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0) \eta^k d\Gamma, \tag{32}$$

где $R(\xi,\eta;x,y)$ - резольвента ядра $\frac{\partial}{\partial n} \varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)$.

Подставляя (32) в (30), получим

$$q(x,y;x_0,y_0) = 2\int_\Gamma \varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0) \frac{\partial}{\partial n} \varepsilon(\xi,\eta;x,y) \eta^k d\Gamma + 4\int_\Gamma \left[\int_\Gamma R(\zeta,\tau;\xi,\eta) \varepsilon(\zeta,\tau;x_0,y_0) \tau^k d\Gamma \right] \times \frac{\partial}{\partial n} \varepsilon(\xi,\eta;x,y) \eta^k d\Gamma.$$

Рассмотрим функцию

$$G(x,y;x_0,y_0)=\varepsilon(x,y;x_0,y_0)+q(x,y;x_0,y_0). \quad (33)$$

Эта функция удовлетворяет условиям:

1) она является решением уравнения (10) во всех точках области D^+, за исключением точки $M_0(x_0,y_0)$;

2) удовлетворяет граничным условиям

$$G(x,y;x_0,y_0)|_\Gamma=0;\ \left(y^kG_y\right)_{y=0}=0.$$

Функция (33), удовлетворяющая условиям 1) и 2), называется функцией Грина задачи N_k с полюсом в точке $M_0(x_0,y_0)$.

С помощью функции Грина решение задачи N_k (18)-(21) дается формулой:

$$u(x,y)=\frac{2^k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{2\pi\Gamma(k)}\int_0^1\nu(t)\left\{\int_\Gamma\left[(t-\xi)^2+\eta^2\right]^{-\frac{k}{2}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,y)\eta^k d\Gamma-\left[(t-x)^2+y^2\right]^{-\frac{k}{2}}\right\}dt- \quad (34)$$
$$-\int_\Gamma\phi(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,y)\eta^k d\Gamma.$$

Существование решения задачи Трикоми. Полагая $y=-x$ в решении задачи Коши (13) и $y=0$ в решении задачи N_k (34), с учетом условий (4) и $u(x,0)=\mu(x)$ получаем

$$\frac{x^{1-k}}{\gamma_1}\int_0^1\frac{\nu[2x(1-t)]}{t^{\frac{k}{2}}(1-t)^{\frac{k}{2}}}dt+\frac{1}{\gamma_2}\int_0^1\frac{\mu[2x(1-t)]}{t^{1-\frac{k}{2}}(1-t)^{1-\frac{k}{2}}}dt=0 \quad (35)$$

$$\mu(x)=\gamma_0\int_0^1\nu(t)\left\{\int_\Gamma\left[(t-\xi)^2+\eta^2\right]^{-\frac{k}{2}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,0)\eta^k d\Gamma-|t-x|^{-k}\right\}dt- \quad (36)$$
$$-\int_\Gamma\phi(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,0)\eta^k d\Gamma.$$

Вопрос о существовании решения задачи Трикоми (1)(4) эквивалентен вопросу о разрешимости системы уравнений (35) и (36) относительно $\mu(x)$ и $\nu(x)$.

В результате исключения $\mu(x)$ из этих уравнений имеем

$$\nu(x)+\lambda\int_0^1\nu(t)K(x,t)dt=F(x), \quad (37)$$

где $\lambda=2^k ctg\frac{k\pi}{2}/\pi$,

$$K(x,t)=\int_\Gamma\left[(t-\xi)^2+\eta^2\right]^{-\frac{k}{2}}\times$$
$$\frac{\partial}{\partial n}\left[x^{\frac{k}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x\frac{G(\xi,\eta;\tau,0)d\tau}{\tau^{1-\frac{k}{2}}(x-\tau)^{1-k}}\int_0^1\frac{\left[\tau+s(x-\tau)\right]^{1-k}ds}{s^{1-\frac{k}{2}}(1-s)^{1-\frac{k}{2}}}\right]\eta^k d\Gamma+ \quad (38)$$
$$+x^{\frac{k}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x\frac{|t-\tau|^{-k}d\tau}{\tau^{1-\frac{k}{2}}(x-\tau)^{1-k}}\int_0^1\frac{\left[\tau+s(x-\tau)\right]^{1-k}ds}{s^{1-\frac{k}{2}}(1-s)^{1-\frac{k}{2}}}=$$
$$=K_1(x,t)+K_2(x,t)$$

$$F(x)=\frac{\Gamma^2\left(1-\frac{k}{2}\right)\sin\frac{k\pi}{2}}{\Gamma(1-k)\pi}\times$$
$$\times\int_\Gamma\phi(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\left[x^{\frac{k}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x\frac{G(\xi,\eta;\tau,0)d\tau}{\tau^{1-\frac{k}{2}}(x-\tau)^{1-k}}\right]\eta^k d\Gamma. \quad (39)$$

Нетрудно видеть, что $K_1(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, где $\Omega=\{(x,t)\in E_2:0<x<1,0<t<1\}$, $F(x)\in C[0,1]$, а $K_2(x,t)$, имеет интегрируемую особенность. Отсюда следует, что уравнение (37) является интегральным уравнением со слабой особенностью.

Ясно, что $F(x)=0$ при $\phi(\xi,\eta)=0$ и мы имеем однородное интегральное уравнение

$$\nu(x)+\lambda\int_0^1\nu(t)K(x,t)dt=0, \quad (37_0)$$

соответствующее неоднородному интегральному уравнению (37), и задачу Трикоми с однородными граничными условиями. В силу теоремы единственности задача Трикоми имеет только нулевое решение. Поэтому $\mu(x)=u(x,0)=0$, $\nu(x)=\left(y^ku_y\right)_{y=0}=0$.

Таким образом, однородное интегральное уравнение (37_0) имеет только нулевое решение. В силу теоремы Фредгольма, неоднородное интегральное уравнение (37) при любой $\phi(\xi,\eta)\in C(\Gamma)$ однозначно разрешимо и вместе с ним однозначно разрешима задача Трикоми. Это приводит к следующей теореме.

Теорема 4. *Если* Γ *– кривая Ляпунова и образует с осью абсцисс прямой угол, то для этой кривой при* $\phi\in C(\Gamma)$ *однозначно разрешима задача Трикоми, и решение может быть представлено в эллиптической области* D^+ *в виде (34) и в гиперболической области* D^- *в виде (13).*

* * * * * * * * * *

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М., 1985.

THE SOLUTION OF THE TRIKOMI PROBLEM FOR A SINGLE EQUATION USING INTEGRALS

I.T.Nazipov

The equation $\left(E_B\right)$ of the region D is under study. The given work is the evidence of single solution to the problem of Trikomi for a single differential equation.