УДК 517.956.6

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Ф.Г.Мухлисов, Р.М.Сафина

В данной работе дается постановка пространственной задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с оператором Бесселя и доказывается существование единственного решения.

Ключевые слова: пространственная задача Трикоми, уравнения смешанного типа, метод интегральных уравнений

Пусть E_3^+ – полупространство $x_1>0$ трехмерного евклидова пространства E_3 точек $x=(x',x_3)$, $x'=(x_1,x_2)$, $E_3^{++}=\{x\in E_3^+ : x_3>0\}$, $E_3^{+-}=\{x\in E_3^+ : x_3<0\}$, E_2^+ – полуплоскость $x_1>0$ координатной плоскости $x_3=0$, $E_2^{++}=\{x'\in E_2^+ : x_2>0\}$, $E_2^{+-}=\{x'\in E_2^+ : x_2<0\}$.

В полупространстве E_3^+ рассмотрим уравнение смешанного типа

$$E_B(u)\equiv B_{x_1}(u)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\operatorname{sign} x_3\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0, \qquad (0.1)$$

где $B_{x_1}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{k}{x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ – оператор Бесселя, $k>0$.

В E_3^{++} уравнение (0.1) является B-эллиптическим, в E_3^{+-} – B-гиперболическим, а E_2^+ – B-параболическая полуплоскость.

Уравнение (0.1) в E_3^{+-} имеет семейство характеристических конусов, которые определяются уравнениями $(x_1-a)^2+(x_2-b)^2-(x_3+c)^2=0$. Полагая здесь $a=0$, $b=0$, $c=1$, получим характеристический полуконус $K_0^+ : x_1^2+x_2^2=(x_3+1)^2$, $x_1>0$, $-1<x_3<0$ с вершиной в точке $(0,0,-1)$, проходящий через полуокружность $C_0^+ : x_1^2+x_2^2=1,\ x_1>0$.

Обозначим через D конечную область, ограниченную поверхностью Γ, расположенную в E_3^{++} и проходящую через C_0^+, частью Γ_1 координатной плоскости $x_1=0$ и характеристическим полуконусом K_0^+. Части области D, в которых $x_3>0$ и $x_3<0$, обозначим соответственно через D^+ и D^-. Поскольку уравнение (0.1) B-эллиптично в D^+ и B-гиперболично в D^-, то их будем называть соответственно B-эллиптической и B-гиперболической частями области D, а эту последнюю смешанной областью. Полукруг полуплоскости E_2^+, отделяющий D^+ и D^-, обозначим через Γ_0^+. Кроме того, через K_0^{++} и K_0^{+-} (Γ_0^{++} и Γ_0^{+-}) обозначим части полуконуса K_0^+ (полукруга Γ_0^+), на которых соответственно $x_2>0$ и $x_2<0$, а соответствующие части полуокружности C_0^+ – через C_0^{++} и C_0^{+-}.

1. Исследование уравнения (0.1) в B-эллиптической части полупространства

1.1. Принцип экстремума

Теорема 1. (принцип локального экстремума). Тождественно не равная нулю B-гармоническая функция $u(x)$ в области D^+ из класса $C^2(D^+)\cap C^1(D^+\cup\Gamma_1)\cap C(\bar D^+)$ не может принимать положительного локального максимума и минимума (отрицательного локального максимума и минимума) в точках области $D^+\cup\Gamma_1$.

Следствие 1. При условиях теоремы функция $u(x)$ может принимать положительные локальные максимумы и минимумы (отрицательные локальные максимумы и минимумы) и, следовательно, наибольшее и наименьшее значения на границе $\Gamma\cup\Gamma_0$.

Следствие 2. Если функция $u(x)$ удовлетворяет условиям теоремы и

$$u\big|_{x_3=0}=\tau(x') \quad \text{и} \quad u_{x_3}\big|_{x_3=0}=\nu(x'),$$

то

$$\tau(x')\,\nu(x')\ge 0,\ x'\in\Gamma_0^+. \qquad (1.1)$$

Доказательство следствия 2 следует из граничного принципа экстремума.

1.2. Постановка внутренней задачи N. Теорема единственности

Требуется найти четную по x_1 функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u\ x\ \in C^2\ D^+\ \cap C^1\ D^+ \cup \Gamma_0\ \cap C\ \bar{D}^+\ ; \quad (1.2)$$

$$\Delta_B u \equiv B_{x_1} u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0\,,\ x \in D^+; \quad (1.3)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = \nu\ x'\ ,\ x' \in \Gamma_0^+\,; \quad (1.4)$$

$$u|_\Gamma = \varphi\ \xi\ ,\ \varphi\ \xi\ \in C\ \Gamma\ . \quad (1.5)$$

Теорема 2. Внутренняя задача N не может иметь более одного решения.

Доказательство следует из следствия 1 к теореме 1.

***1.3. Существование решения внутренней задачи** N*

Аналогично доказательству, приведенному в [1], можно показать, что фундаментальное решение (1.3) при малых значениях $r = |x - x_0|$ представляется в виде

$$\varepsilon\ x, x_0\ = \frac{x_1 x_{10}^{-\frac{k}{2}}}{4\pi r} + \Phi\ x, x_0\ , \quad (1.6)$$

где $\Phi\ x, x_0$ – регулярная в точке x_0 функция.

Пусть $G\ x,\xi$ – функция Грина задачи Дирихле для области D^*, ограниченной поверхностью Γ, ее зеркальным отражением в плоскости $x_3 = 0$ и частью Γ_1^* плоскости $x_1 = 0$.

Известно [2], что функция Грина выразится формулой

$$G\ x,\xi\ = \varepsilon\ x,\xi\ + \psi\ x,\xi\ , \quad (1.7)$$

где функция $\psi\ x,\xi$ регулярна в области D^*.

Заменяя в (1.7) фундаментальное решение $\varepsilon\ x,\xi$ на его значение из (1.6), получаем

$$G\ x,\xi\ = \frac{x_1 x_{10}^{-\frac{k}{2}}}{4\pi r} + g\ x,\xi\ , \quad (1.8)$$

где $g\ x,\xi$ – регулярная функция в области D^*.

Пусть x – внутренняя точка области D^+, $S_{x,\varepsilon}$ – сфера с центром в точке x и радиуса ε такого, что $S_{x,\varepsilon} \subset D^+$. Обозначим через D_ε^+ область, ограниченную границей области D^+ и сферой $S_{x,\varepsilon}$, $u\ x$ – решение задачи N.

Применяя к функциям $u\ \xi$ и $G\ x,\xi$ вторую формулу Грина в области D_ε^+, с учетом того, что $\Delta_B u = 0$ и $\Delta_B G\ x,\xi\ = 0$, получаем

$$\begin{aligned}&\iint_\Gamma \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)\xi_1^k d\Gamma + \\ &+\iint_{S_{x\varepsilon}} \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)\xi_1^k dS_{x\varepsilon} - \\ &-\iint_{\Gamma_0^+} \left(G\frac{\partial u}{\partial \xi_3} - u\frac{\partial G}{\partial \xi_3}\right)\xi_1^k d\xi_1 d\xi_2 = 0.\end{aligned} \quad (1.9)$$

Так как на Γ : $G = 0$ и $u = \varphi\ \xi$; на $S_{x\varepsilon}$: $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$ и $r = \varepsilon$; на Γ_0^+: $\frac{\partial u}{\partial \xi_3} = \nu\ \xi'$ и $\frac{\partial G}{\partial \xi_3} = 0$, то формулу (1.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&-\iint_\Gamma \varphi\ \xi\ \frac{\partial G}{\partial n}\xi_1^k d\Gamma - \\ &-\iint_{S_{x\varepsilon}} \left(G\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial G}{\partial r}\right)\xi_1^k dS_{x\varepsilon} - \\ &-\iint_{\Gamma_0^+} G\nu\ \xi'\ \xi_1^k d\xi_1 d\xi_2 = 0.\end{aligned} \quad (1.10)$$

Вычислим предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла

$$J_\varepsilon = \iint_{S_{x\varepsilon}} \left(G\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial G}{\partial r}\right)\xi_1^k dS_{x\varepsilon}\,. \quad (1.11)$$

Заменяя в этом интеграле функцию Грина G на ее значение из (1.8), получаем

$$J_\varepsilon = \frac{x_1^{-\frac{k}{2}}}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_{x\varepsilon}} u\xi_1^{\frac{k}{2}} dS_{x\varepsilon} + I_{2\varepsilon}\ x,\xi\ = I_{1\varepsilon} + I_{2\varepsilon}\,.$$

Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{2\varepsilon} = 0\,. \quad (1.12)$$

С помощью формулы среднего значения интеграла можно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{1\varepsilon} = u\ x\ . \quad (1.13)$$

Переходя в формуле (1.10) к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом предельных соотношений (1.12) и (1.13), получим

$$\begin{aligned}u\ x\ = &-\iint_\Gamma \varphi\ \xi\ \frac{\partial G\ \xi, x}{\partial n_\xi}\xi_1^k d\Gamma - \\ &-\iint_{\Gamma_0^+} G\ \xi', x\ \nu\ \xi'\ \xi_1^k d\xi'.\end{aligned} \quad (1.14)$$

2. Исследование уравнения (0.1) в B - гиперболическом полупространстве

2.1. Постановка задачи Коши. Теорема единственности

Требуется найти четную по x_1 функцию $u\ x$, удовлетворяющую условиям:

$$u\ x\ \in C^2\ D^-\ \cap C^1\ D^- \cup \Gamma_0^+\ \cap C\ \bar{D}^-\ ; \quad (2.1)$$

$$\Delta_B u \equiv B_{x_1} u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0\,,\ x \in D^-; \quad (2.2)$$

$$u|_{x_3=0} = \tau\ x'\ ,\ u_{x_3}\big|_{x_3=0} = \nu\ x'\ ,\ x' \in \Gamma_0^+\,; \quad (2.3)$$

Предполагается, что $\tau(x')$ и $\nu(x')$ – четные по x_1 функции и из условия (2.1) следует, что $\tau(x') \in C^1(\Gamma_0^+) \cap C(\bar{\Gamma}_0^+)$, $\nu(x') \in C(\Gamma_0^+)$.

Функция $\nu(x')$ в точках полуокружности C_0^+ может иметь интегрируемую особенность.

Теорема 3. Задача коши (2.1)-(2.3) не может иметь более одного решения.

2.2. Решение задачи Коши

Решение задачи Коши (2.1)-(2.3) ищем в виде [3]

$$u(x) = \iint_{E_2^+} \Phi(\xi') e^{ix_2\xi_2} e^{-i|\xi'|x_3} j_\nu(x_1\xi_1) \xi_1^{2\nu+1} d\xi' + \iint_{E_2^+} \Psi(\xi') e^{ix_2\xi_2} e^{i|\xi'|x_3} j_\nu(x_1\xi_1) \xi_1^{2\nu+1} d\xi', \qquad (2.4)$$

где $j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) J_\nu(t)/t^\nu$, $J_\nu(t)$ – функция Бесселя, $\nu = (k-1)/2$, $\Phi(\xi')$ и $\Psi(\xi')$ – произвольные функции.

Произвольные функции $\Phi(\xi')$ и $\Psi(\xi')$ найдем из требования, чтобы функция (2.4) удовлетворяла начальным условиям (2.3). Подставляя ее в эти начальные условия, получаем систему уравнений

$$\iint_{E_2^+} \Phi(\xi') e^{ix_2\xi_2} j_\nu(x_1\xi_1) \xi_1^{2\nu+1} d\xi' + \iint_{E_2^+} \Psi(\xi') e^{ix_2\xi_2} j_\nu(x_1\xi_1) \xi_1^{2\nu+1} d\xi' = \tau(x'), \qquad (2.5)$$

$$\iint_{E_2^+} (-i|\xi'|) \Phi(\xi') e^{ix_2\xi_2} j_\nu(x_1\xi_1) \xi_1^{2\nu+1} d\xi' + \iint_{E_2^+} (i|\xi'|) \Psi(\xi') e^{ix_2\xi_2} j_\nu(x_1\xi_1) \xi_1^{2\nu+1} d\xi' = \nu(x'). \qquad (2.6)$$

Применяя к формулам (2.5) и (2.6) обратное преобразование Фурье-Бесселя, получаем

$$\Phi(\xi') + \Psi(\xi') = \frac{1}{(2\pi)^2 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1)} \times \iint_{E_2^+} \tau(\eta') e^{-i\xi_2\eta_2} j_\nu(\eta_1\xi_1) \eta_1^{2\nu+1} d\eta' = \tilde{\tau}(\xi'),$$

$$(-i|\xi'|)\Phi(\xi') + (i|\xi'|)\Psi(\xi') = \frac{1}{(2\pi)^2 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1)} \times \iint_{E_2^+} \nu(\eta') e^{-i\xi_2\eta_2} j_\nu(\eta_1\xi_1) \eta_1^{2\nu+1} d\eta' = \tilde{\nu}(\xi'). \qquad (2.7)$$

Решая эту систему, имеем

$$\Phi(\xi') = \frac{1}{2}\tilde{\tau}(\xi') - \frac{1}{2i|\xi'|}\tilde{\nu}(\xi'),$$

$$\Psi(\xi') = \frac{1}{2}\tilde{\tau}(\xi') + \frac{1}{2i|\xi'|}\tilde{\nu}(\xi').$$

Подставляя эти значения Φ и Ψ в формулу (2.4), получим

$$u(x) = \iint_{E_2^+} \tilde{\tau}(\xi') e^{ix_2\xi_2} j_\nu(x_1\xi_1) \cos|\xi'|x_3 \xi_1^{2\nu+1} d\xi' + \iint_{E_2^+} \tilde{\nu}(\xi') e^{ix_2\xi_2} j_\nu(x_1\xi_1) \frac{\sin|\xi'|x_3}{|\xi'|} \xi_1^{2\nu+1} d\xi'. \qquad (2.8)$$

Известно [4], что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin|\xi'|x_3}{|\xi'|} e^{i(x_2-\eta_2)\xi_2} d\xi_2 = \begin{cases} 0 \text{ при } (x_2-\eta_2)^2 > x_3^2, \\ \pi J_0\left(\xi_1\sqrt{x_3^2 - (x_2-\eta_2)^2}\right) \text{ при } (x_2-\eta_2)^2 < x_3^2. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Заменяя в (2.8) $\tilde{\tau}(\xi')$ и $\tilde{\nu}(\xi')$ на их значения из (2.7), а внутренние интегралы на их значения из (2.9), учитывая, что $j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) J_\nu(t)/t^\nu$, имеем

$$u(x) = \frac{x_1^{-\nu}}{4\pi}\left\{ \iint_{\tilde{\Omega}} \tau(\eta') \left[\frac{\partial}{\partial x_3}\int_0^\infty J_0\left(\xi_1\sqrt{x_3^2 - (x_2-\eta_2)^2}\right) \times J_\nu(\eta_1\xi_1) J_\nu(x_1\xi_1) \xi_1 d\xi_1\right] \eta_1^{\nu+1} d\eta' - \iint_{\tilde{\Omega}} \nu(\eta') \left[\int_0^\infty J_0\left(\xi_1\sqrt{x_3^2 - (x_2-\eta_2)^2}\right) \times J_\nu(\eta_1\xi_1) J_\nu(x_1\xi_1) \xi_1 d\xi_1\right] \eta_1^{\nu+1} d\eta' \right\}, \qquad (2.10)$$

где $\tilde{\Omega} = \{(\eta_2 - x_2)^2 < x_3^2\}$.

Также известно [4], что

$$\int_0^\infty J_0\left(\xi_1\sqrt{x_3^2 - (\eta_2-x_2)^2}\right) J_\nu(\eta_1\xi_1) J(x_1\xi_1) \xi_1 d\xi_1 = \frac{2(\eta_1 x_1)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(-\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times \int_0^\pi \left[x_3^2 - (\eta_2-x_2)^2 - \eta_1^2 - x_1^2 + 2\eta_1 x_1\cos\varphi\right]^{-(\nu+1)} \sin^{2\nu}\varphi d\varphi. \qquad (2.11)$$

при $(\eta_1 + x_1)^2 + (\eta_2 - x_2)^2 < x_3^2$, $\eta_1 > 0$, $x_1 > 0$, $\nu > -\dfrac{1}{2}$.

Заменяя в (2.10) внутренние интегралы на их значение из (2.11) и переходя от x_1 к $-x_1$, с учетом четности решения задачи Коши, имеем

$$u(x) = \frac{1}{2\pi^{3/2}\Gamma(-\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left\{\iint_{\Omega_x} \tau(\eta') \times \left[\frac{\partial}{\partial x_3}\int_0^\pi \left(x_3^2 - (\eta_2-x_2)^2 - \eta_1^2 - x_1^2 - 2\eta_1x_1\cos\varphi\right)^{-(\nu+1)} \sin^{2\nu}\varphi d\varphi\right]\eta_1^{2\nu+1} d\eta' - \iint_{\Omega_x} \nu(\eta') \left[\int_0^\pi \left(x_3^2 - (\eta_2-x_2)^2 - \eta_1^2 - x_1^2 - 2\eta_1x_1\cos\varphi\right)^{-(\nu+1)} \sin^{2\nu}\varphi d\varphi\right]\eta_1^{2\nu+1} d\eta'\right\}, \qquad (2.12)$$

где $\Omega_x = \{|\eta' - x'| < |x_3|\}$.

Производя во внутренних интегралах (2.12) замену переменной по формуле $\varphi=\pi-\alpha$, получаем

$$u(x)=\frac{1}{2\pi^{3/2}\Gamma(-\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left\{\iint_{\Omega_x}\tau(\eta')\times\right.$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\int_0^{\pi}\left(x_3^2-(\eta_2-x_2)^2-\eta_1^2-x_1^2+2\eta_1x_1\cos\alpha\right)^{-(\nu+1)}\sin^{2\nu}\alpha d\alpha\right]\eta_1^{2\nu+1}d\eta'- \qquad (2.13)$$
$$\left.-\iint_{\Omega_x}\nu(\eta')\left[\int_0^{\pi}\left(x_3^2-(\eta_2-x_2)^2-\eta_1^2-x_1^2+2\eta_1x_1\cos\alpha\right)^{-(\nu+1)}\sin^{2\nu}\alpha d\alpha\right]\eta_1^{2\nu+1}d\eta'\right\},$$

Вычисляя здесь производную по x_3, имеем

$$u(x)=\frac{1}{2\pi^{3/2}\Gamma(-\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left\{2(\nu+1)|x_3|\iint_{\Omega_x}\tau(\eta')\times\right.$$
$$\times\left[\int_0^{\pi}\left(x_3^2-(\eta_2-x_2)^2-\eta_1^2-x_1^2+2\eta_1x_1\cos\alpha\right)^{-(\nu+2)}\sin^{2\nu}\alpha d\alpha\right]\eta_1^{2\nu+1}d\eta'+ \qquad (2.14)$$
$$\left.+\iint_{\Omega_x}\nu(\eta')\left[\int_0^{\pi}\left(x_3^2-(\eta_2-x_2)^2-\eta_1^2-x_1^2+2\eta_1x_1\cos\alpha\right)^{-(\nu+1)}\sin^{2\nu}\alpha d\alpha\right]\eta_1^{2\nu+1}d\eta'\right\}.$$

Решение задачи Коши (2.14) запишем в виде

$$u(x)=\frac{1}{2\pi\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}\left\{2(\nu+1)|x_3|\times\right.$$
$$\times\iint_{\Omega_x}\tau(\eta')T_{\eta'}^{x'}\left(x_3^2-|\eta'|^2\right)^{-(\nu+2)}\eta_1^{2\nu+1}d\eta'+ \qquad (2.15)$$
$$\left.+\iint_{\Omega_x}\nu(\eta')T_{\eta'}^{x'}\left(x_3^2-|\eta'|^2\right)^{-(\nu+1)}\eta_1^{2\nu+1}d\eta'\right\},$$

где

$$T_{\eta'}^{x'}f(\eta')=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\times$$
$$\times\int_0^{\pi}f\left(\sqrt{\eta_1^2+x_1^2-2\eta_1x_1\cos\alpha},\eta_2-x_2\right)\sin^{2\nu}\alpha d\alpha$$

– оператор обобщенного сдвига.

3. Задача Трикоми

3.1. Постановка задачи Трикоми и единственность ее решения

Требуется найти четную по x_1 функцию $u(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x)\in C^2\left(D^+\cup D^-\right)\cap C\left(\bar{D}\right)\cap C^1(D); \qquad (3.1)$$

$$E_B(u)=0,\ x\in D^+\cup D^-; \qquad (3.2)$$

$$u|_{\Gamma}=\varphi(\xi),\ \xi\in\Gamma; \qquad (3.3)$$

$$u|_{K_0^{++}}=0. \qquad (3.4)$$

Из условия (3.1) задачи Трикоми следует, что на полукруге Γ_0^+ выполняются условия склеивания

$$u(x',0-)=u(x',0+)=\tau(x'); \qquad (3.5)$$

$$u_{x_3}(x',0-)=u_{x_3}(x',0+)=\nu(x'), \qquad (3.6)$$

где $\tau(x')$ и $\nu(x')$ – пока неопределенные функции. Их найдем из требования, чтобы решение задачи Трикоми в B-эллиптической подобласти D^+ совпадало с решением задачи N, а в B-гиперболической подобласти D^- – с решением задачи Коши.

Теорема 4. Задача Трикоми не может иметь более одного решения.

3.2. Существование решения задачи Трикоми

Задачу Трикоми будем решать методом интегральных уравнений. Нам потребуются соотношения между $\tau(x')$ и $\nu(x')$ из обеих подобластей D^+ и D^-.

В B-гиперболической подобласти D^- рассмотрим задачу Коши (2.1)-(2.3), а в B-эллиптической подобласти D^+ – задачу N (1.2)-(1.5), считая как бы известными функции $\tau(x')$ и $\nu(x')$.

Решение задачи N в силу (1.14) имеет вид

$$u(x)=-\iint_{\Gamma}\varphi(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_{\xi}}\xi_1^k d\Gamma-$$
$$-\iint_{\Gamma_0^+}G(\xi',x)\nu(\xi')\xi_1^k d\xi', \qquad (3.7)$$

а решение задачи Коши в силу (2.15) – вид

$$u(x)=\frac{1}{2\pi\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}\times$$
$$\times\left\{2(\nu+1)|x_3|\iint_{\Omega_x}\tau(\eta')T_{\eta'}^{x'}\left(x_3^2-|\eta'|^2\right)^{-(\nu+2)}\eta_1^{2\nu+1}d\eta'+\right. \qquad (3.8)$$
$$\left.+\iint_{\Omega_x}\nu(\eta')T_{\eta'}^{x'}\left(x_3^2-|\eta'|^2\right)^{-(\nu+1)}\eta_1^{2\nu+1}d\eta'\right\}.$$

Полагая в решении задачи N (3.7) $x_3=0$ и в решении задачи Коши (3.8) $x_3=|x'|-1$, $x'\in\Gamma_0^{++}$, с учетом условии (3.4) и (3.5) имеем

$$\tau(x')=-\iint_{\Gamma_0^+}\nu(\xi')G(\xi',x')\xi_1^k d\xi'-$$
$$-\iint_{\Gamma}\varphi(\xi)\frac{\partial G(\xi,x')}{\partial n_{\xi}}\xi_1^k d\Gamma, \qquad (3.9)$$

$$0=2(\nu+1)(1-|x'|)\times$$
$$\times\iint_{\Omega_x}\tau(\eta')T_{\eta'}^{x'}\left[(1-|x'|)^2-|\eta'|^2\right]^{-(\nu+2)}\eta_1^{2\nu+1}d\eta'+ \qquad (3.10)$$
$$+\iint_{\Omega_x}\nu(\eta')T_{\eta'}^{x'}\left[(1-|x'|)^2-|\eta'|^2\right]^{-(\nu+1)}\eta_1^{2\nu+1}d\eta'.$$

Формула (3.9) дает первое уравнение между $\tau(x')$ и $\nu(x')$, которое определяется из условия склеивания (3.5), а формула (3.10) дает второе уравнение, которое определяется из того, что решение задачи Трикоми в области D^- должно принимать значение 0 на K_0^{++}.

Вопрос о существовании решения задачи Трикоми (3.1)-(3.4) эквивалентен вопросу о разрешимости системы уравнений (3.9) и (3.10) относительно $\tau(x')$ и $\nu(x')$.

Сведем систему уравнений (3.9) и (3.10) к одному интегральному уравнению с одной неизвестной функцией. Для этого уравнение (3.10) запишем в виде

$$\iint_{\Omega_x} \left\{ \tau(\eta')\, 2(\nu+1)(1-|x'|)\, T_{\eta'}^{x'}\left[(1-|x'|)^2-|\eta'|^2\right]^{-(\nu+2)} + \nu(\eta')\, T_{\eta'}^{x'}\left[(1-|x'|)^2-|\eta'|^2\right]^{-(\nu+1)} \right\} \eta_1^{2\nu+1} d\eta' = 0. \quad (3.11)$$

Из условия (1.1) следует, что равенство (3.11) возможно только тогда, когда подынтегральная функция равна нулю, т.е.

$$2(\nu+1)\tau(\eta')(1-|x'|)\, T_{\eta'}^{x'}\left[(1-|x'|)^2-|\eta'|^2\right]^{-(\nu+2)} + \nu(\eta')\, T_{\eta'}^{x'}\left[(1-|x'|)^2-|\eta'|^2\right]^{-(\nu+1)} = 0.$$

Откуда

$$\nu(\eta') = \frac{2(\nu+1)(|x'|-1)\, T_{\eta'}^{x'}\left[(1-|x'|)^2-|\eta'|^2\right]^{-(\nu+2)}}{T_{\eta'}^{x'}\left[(1-|x'|)^2-|\eta'|^2\right]^{-(\nu+1)}}\tau(\eta'). \quad (3.12)$$

Заменяя в (3.9) $\nu(\eta')$ на ее значение из (3.12), получим

$$\tau(x') = \lambda \iint_{\Gamma_0^+} \tau(\xi') K(\xi',x') \xi_1^k d\xi' + F(x'), \quad (3.13)$$

где $\lambda = 2(\nu+1)$,

$$K(\xi',x') = \frac{(1-|x'|)\, T_{\xi'}^{x'}\left[(1-|x'|)^2-|\xi'|^2\right]^{-(\nu+2)}}{T_{\xi'}^{x'}\left[(1-|x'|)^2-|\xi'|^2\right]^{-(\nu+1)}} G(\xi',x'),$$

$$F(x') = -\iint_{\Gamma} \varphi(\xi) \frac{\partial G(\xi,x')}{\partial n_\xi} \xi_1^k d\Gamma.$$

Нетрудно доказать, что ядро $K(\xi',x')$ интегрального уравнения (3.13) имеет интегрируемую особенность и $F(x') \in C(\Gamma_0^+)$.

Отсюда следует, что уравнение (3.13) является интегральным уравнением со слабой особенностью.

Поэтому для уравнения (3.13) применима теория интегральных уравнений Фредгольма со слабой сингулярностью.

Ясно, что $F(x') = 0$ при $\varphi(\xi) = 0$ и мы имеем однородное интегральное уравнение

$$\tau(x') = \lambda \iint_{\Gamma_0^+} \tau(\xi') K(\xi',x') \xi_1^k d\xi', \quad (3.13_0)$$

соответствующее неоднородному интегральному уравнению (3.13) и задачу Трикоми с однородными граничными условиями

$$u|_{\Gamma} = 0,\ u|_{x_3=|x'|-1} = 0.$$

В силу теоремы единственности задача Трикоми имеет только нулевое решение. Поэтому $u(x',0) = \tau(x') = 0$. Отсюда и из (3.12) следует, что $\nu(x') = 0$.

Таким образом, однородное интегральное уравнение (3.13_0) имеет только нулевое решение. В силу теоремы Фредгольма неоднородное интегральное уравнение (3.13) при любой $\varphi(\xi) \in C(\Gamma)$ однозначно разрешимо и вместе с ним однозначно разрешима задача Трикоми (3.1)-(3.4).

* * * * * * * * * *

1. Weinstein A. Discontinuous integrals and generalized potential theory. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – Vol.63, №2. – P.342-354.
2. Мухлисов Ф.Г. О некоторых условиях существования функции Грина задачи типа Дирихле. // Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Куйбышев: Изд-во пед. института, 1988. – С.66-75.
3. Мухлисов Ф.Г., Гафурова С.М. Решение задачи типа Коши для одного B-гиперболического уравнения методом интеграла Фурье-Бесселя // Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы: Тр. Междунар. наун. конф. – Стерлитамак: Изд-во "Гилем" Уфа, 2003. – Т.1. – С.183-187.
4. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Государственное Изд-во технико-теоретической литературы, 1951.

THE SOLUTION OF TRICOMI PROBLEM IN THE SPACE FOR AN EQUATION OF THE MIXED TYPE WITH THE BESSEL OPERATOR USING THE METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS

F.G.Mukhlisov, R.M.Safina

In this work we give the statement of Tricomi problem in the space for an equation of the mixed type with Bessel operator. The existence of the unique solution is proved.

Key words: Tricomi problem, equation of the mixed type, integral equation method

* * * * * * * * * * *

Мухлисов Фоат Габдуллович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

Сафина Римма Марселевна – ассистент кафедры экономической информатики и математики Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

E-mail: mf@tggpu.ru