Ф.Г.Мухлисов, Г.З.Хабибуллина

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть E_3^+ – полупространство $x_3 > 0$ трехмерного евклидова пространства E_3 точек $x = (x', x_3)$, $x' = (x_1, x_2)$, D – симметричная относительно плоскости $x_3 = 0$ конечная область в E_3, ограниченная поверхностью Γ. Обозначим через D^+ и Γ^+ - части соответственно D и Γ, расположенные в полупространстве E_3^+, $D_e^+ = E_3^+ \setminus (D^+ \cup \Gamma^+)$.

В E_3^+ рассмотрим уравнение

$$\Delta_T u - \lambda^2 u = 0 , \qquad (1)$$

где $\Delta_T u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + Tu$, $T = x_3^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$; $\alpha > 1$, $\lambda^2 > 0$ – некоторые постоянные.

В данной работе доказывается существование единственного решения основных краевых задач для уравнения (1). В первом параграфе выводятся формулы Грина для оператора Δ_T. Во втором параграфе дается интегральное представление решения уравнения (1) и доказывается теорема о принципе экстремума. В третьем параграфе дается постановка краевых задач для уравнения (1) и доказывается единственность их решения. В четвертом параграфе вводятся потенциалы типа простого и двойного слоев для уравнения (1) и изучаются их свойства. В пятом параграфе основные краевые задачи для уравнения (1) редуцируются к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. В шестом параграфе доказывается однозначная разрешимость интегральных уравнений.

§1.Формулы Грина

С помощью замены переменных по формулам

$$\xi' = x', \quad \xi_3 = \frac{x_3^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

приводим уравнение (1) к виду

$$\tilde{\Delta}_T u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} - \lambda^2 u = 0 \qquad (2)$$

При этом область D^+ переходит в бесконечную область G, поверхность Γ^+ - в бесконечную поверхность $\tilde{\Gamma}$.

Ясно, что если $u=\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – решение уравнения (2) в области G, то функция $u=\varphi\left(x',\dfrac{x_3^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$ будет решением уравнения (1) в области D^+.

Известно, что любое ограниченное решение уравнения (1) при $\xi_3\to-\infty$ экспотенциально стремится к нулю. Поэтому если $u(x)$ – ограниченное решение уравнения (1) в области D^+, то при $x_3\to 0$ $u=O(x_3^q)$, $q>\alpha$.

Обозначим через $C_q^2(D^+)$ множество функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) $u\in C^2(D^+)$,

2) $u=O(x_3^q)$ при $x_3\to 0$.

Для функций $u,v\in C_q^2(D^+)\cap C^1(D^+\cup\Gamma^+)$ имеют место формулы

$$\iiint\limits_{D^+} v\Delta_T u x_3^{-\alpha}dx+\iiint\limits_{D^+}\left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+x_3^{2\alpha}\frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}+\lambda^2uv\right]x_3^{-\alpha}dx= \tag{3}$$
$$=\iint\limits_{\Gamma^+} vA[u]\xi_3^{-\alpha}d\Gamma^+,$$

где $A[\ ]=\cos(n,\xi_1)\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}+\cos(n,\xi_2)\dfrac{\partial}{\partial\xi_2}+\xi_3^{2\alpha}\cos(n,\xi_3)\dfrac{\partial}{\partial\xi_3}$ – конормальная производная, n – внешняя нормаль к поверхности Γ^+, и

$$\iiint\limits_{D^+}[v\Delta_T u-u\Delta_T v]\xi_3^{-\alpha}dx=\iint\limits_{\Gamma^+}\{vA[u]-uA[v]\}\xi_3^{-\alpha}d\Gamma^+. \tag{4}$$

Формула (3) называется первой формулой Грина, формула (4) – второй формулой Грина для оператора Δ_T.

Если $u=v$ и u – решение уравнения (1) в области D^+, то из формулы (3) имеем

$$\iiint\limits_{D^+}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+x_3^{2\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2+\lambda^2u^2\right]x_3^{-\alpha}dx=\iint\limits_{\Gamma^+}uA[u]\xi_3^{-\alpha}d\Gamma^+.$$

Если u и v – решения уравнения (1), то

$$\iint\limits_{\Gamma^+}\{vA[u]-uA[v]\}\xi_3^{-\alpha}d\Gamma^+=0.$$

§2. Интегральное представление решения. Принцип экстремума

Известно [1], что фундаментальное решение уравнения (2) с особенностью в точке ξ_0 имеет вид

$$\omega(\xi,\xi_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda r_{\xi\xi_0}}}{r_{\xi\xi_0}},$$

где $r_{\xi\xi_0}=\sqrt{(\xi_1-\xi_{10})^2+(\xi_2-\xi_{20})^2+(\xi_3-\xi_{30})^2}$.

Возвращаясь к старым переменным, получаем фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точке x_0. Оно имеет вид

$$\varepsilon(x, x_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda\rho_{xx_0}}}{\rho_{xx_0}} \tag{5}$$

где
$$\rho_{xx_0} = \sqrt{\left(x' - x_0'\right)^2 + \left(\frac{x_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{x_{10}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^2}\ .$$

Нетрудно доказать, что для функции $u(x) \in C_q^2\left(D^+\right) \cap C^1\left(\overline{D}^+\right)$ при $x_0 \in D^+$ имеет место следующее интегральное представление

$$u(x_0) = \iint_{\Gamma^+} \left(\varepsilon(\xi, x_0)A[u] - uA[\varepsilon(\xi, x_0)]\right)\xi_1^{-\alpha}d\Gamma^+ \tag{6}$$

Теорема 1. (Принцип экстремума). Если функция $u(x) \in C_q^2\left(D^+\right) \cap C^1\left(\overline{D}^+\right)$ является решением уравнения (1) в области D^+, то она не может достигать во внутренних точках области D^+ и на $\Gamma^{(0)}$ положительных максимальных и отрицательных минимальных значений.

§3. Постановка краевых задач типа Дирихле и Неймана и единственность их решения

Внутренняя задача типа Дирихле. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_q^2\left(D^+\right) \cap C^1\left(\overline{D}^+\right); \tag{7}$$

$$\Delta_T u = 0\ ,\ x \in D^+; \tag{8}$$

$$u\big|_{\Gamma^+} = \varphi(\xi),\ \xi \in \Gamma^+,\ \varphi(\xi) \in C_q\left(\Gamma^+\right), \tag{9}$$

где $C_q\left(\Gamma^+\right)$ – множество функций $u(x)$, непрерывных на Γ^+ и $u = O\left(\xi_1^q\right)$ при $\xi_1 \to 0$.

Теорема 2. Внутренняя задача типа Дирихле не может иметь более одного решения.

Внешняя задача типа Дирихле. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C_q^2\left(D^+\right) \cap C^1\left(\overline{D}^+\right); \tag{10}$$

$$\Delta_T u = 0\ ,\ x \in D_e^+; \tag{11}$$

$$u = o(1) \text{ при } |x| \to \infty; \tag{12}$$

$$u\big|_{\Gamma^+} = \psi(\xi),\ \xi \in \Gamma^+,\ \psi(\xi) \in C_q\left(\Gamma^+\right). \tag{13}$$

Теорема 3. Внешняя задача типа Дирихле не может иметь более одного решения.

Внутренняя задача типа Неймана. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x)\in C_q^2(D^+)\cap C^1(\overline{D}^+); \qquad (14)$$

$$\Delta_T u = 0, \ x\in D^+; \qquad (15)$$

$$A[u]_{\Gamma^+} = g(\xi), \ \xi\in\Gamma^+, \ g(\xi)\in C_q(\Gamma^+). \qquad (16)$$

Теорема 4. Внутренняя задача типа Неймана не может иметь более одного решения.

Внешняя задача типа Неймана. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x)\in C_q^2(D^+)\cap C^1(\overline{D}^+); \qquad (17)$$

$$\Delta_T u = 0, \ x\in D_e^+; \qquad (18)$$

$$u = o(1) \text{ при } |x|\to\infty; \qquad (19)$$

$$A[u]_{\Gamma^+} = f(\xi), \ \xi\in\Gamma^+, \ f(\xi)\in C_q(\Gamma^+). \qquad (20)$$

Теорема 5. Внешняя задача типа Неймана не может иметь более одного решения.

§4. Потенциалы типа простого и двойного слоев и их свойства

Полагая в формуле (6) $x_0 = x$, $A[u]=\mu(\xi)$, $-u=\upsilon(\xi)$, получаем

$$u(x)=\iint_{\Gamma^+}\mu(\xi)\varepsilon(\xi,x)\xi_1^{-m}d\Gamma^+ + \iint_{\Gamma^+}\upsilon(\xi)A[\varepsilon(\xi,x)]\xi_1^{-m}d\Gamma^+ .$$

Отсюда следует, что решение $u(x)$ уравнения (1) в области D^+ может быть представлена в виде суммы двух интегральных операторов вида:

$$V(x)=\iint_{\Gamma^+}\mu(\xi)\varepsilon(\xi,x)\xi_1^{-m}d\Gamma^+, \qquad (21)$$

$$W(x)=\iint_{\Gamma^+}\upsilon(\xi)A[\varepsilon(\xi,x)]\xi_1^{-m}d\Gamma^+. \qquad (22)$$

Интегральный оператор $V(x)$ называется потенциалом типа простого слоя с плотностью $\mu(\xi)$, а интегральный оператор $W(x)$ – потенциалом типа двойного слоя с плотностью $\upsilon(\xi)$.

Представляя показательную функцию $e^{-\lambda\rho_{xx_0}}$ в виде степенного ряда

$$e^{-\lambda\rho_{xx_0}} = 1-\frac{\lambda\rho_{xx_0}}{1!}+\frac{\lambda^2\rho_{xx_0}^2}{2!}-\frac{\lambda^3\rho_{xx_0}^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{\lambda^n\rho_{xx_0}^n}{n!}+\ldots,$$

фундаментальное решение (5) уравнения (1) представим в виде

$$\varepsilon(x,x_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\rho_{xx_0}}-\lambda+\frac{\lambda^2\rho_{xx_0}}{2!}-\frac{\lambda^3\rho_{xx_0}^2}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{\lambda^n\rho_{xx_0}^{n-1}}{n!}+\ldots=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\rho_{xx_0}}+\psi(\rho_{xx_0}),$$

где $\psi(\rho_{xx_0})$ – непрерывная функция в полупространстве E_3^+. Поэтому ядра потенциалов $V(x)$ и $W(x)$ имеют такие же особенности, что для уравнения

$$\Delta_T u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + Tu = 0 .$$

В силу известных результатов [2] имеет место следующие теоремы.

Теорема 6. Если Γ^+ – поверхность Ляпунова образует с плоскостью $x_2 = 0$ прямой угол и $\mu \in C_q(\Gamma^+)$, то потенциал типа простого слоя (21) принадлежит $C_q^1(\overline{D}^+)$ и $C_q^1(\overline{D}_e^+)$, и справедливы следующие предельные соотношения

$$V_{i,e} = \overline{V(x_0)}, \tag{23}$$

$$A[V(x_0)]_i = \frac{\mu(x_0)}{2} + A[\overline{V(x_0)}], \tag{24}$$

$$A[V(x_0)]_e = -\frac{\mu(x_0)}{2} + A[\overline{V(x_0)}], \tag{25}$$

где $A[V(x_0)]_i$, $A[V(x_0)]_e$ – означают соответствующие предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя при стремлении точки x к точке x_0 изнутри и извне Γ^+, а $\overline{V(x_0)}$ и $A[\overline{V(x_0)}]$ – прямые значения соответственно потенциала типа простого слоя и его конормальной производной.

Теорема 7. Если Γ^+ – поверхность Ляпунова образует с плоскостью $x_2 = 0$ прямой угол и $\upsilon \in C_q(D^+)$, то потенциал типа двойного слоя (22) принадлежит $C_q^1(\overline{D}^+)$ и $C_q^1(\overline{D}_e^+)$ и его предельные значения на Γ^+ изнутри и извне Γ^+ выражаются формулами

$$W_i(x_0) = -\frac{\upsilon(x_0)}{2} + \overline{W(x_0)}, \tag{26}$$

$$W_e(x_0) = \frac{\upsilon(x_0)}{2} + \overline{W(x_0)}, \tag{27}$$

где $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ – означают соответствующие предельные значения потенциалов типа двойного слоя в точке $x_0 \in \Gamma^+$ при стремлении точки x к точке x_0 изнутри и извне Γ^+, а $\overline{W(x_0)}$ – прямое значение потенциала типа двойного слоя.

§5. Редукция задач типа Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода

Решение внутренней задачи типа Дирихле (7) – (9) будем искать в виде потенциала типа двойного слоя

$$u(x) = \iint_{\Gamma^+} \upsilon(\xi) A[\varepsilon(\xi, x)] \xi_2^{-\alpha} d\Gamma^+ . \tag{28}$$

Функция u, определяемая формулой (28), удовлетворяет условиям (7), (8) внутренней задачи типа Дирихле. Неизвестную плотность υ найдем из требования, чтобы функция (28) удовлетворяла граничному условию $u\big|_{\Gamma^+} = \varphi(\xi)$. С этой целью подставим ее в это граничное условие. В результате с учетом формулы (26) получаем:

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = -\frac{\upsilon(x_0)}{2} + \iint_{\Gamma^+} \upsilon(\xi) A_\xi \left[\varepsilon(\xi, x)\right] \xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+ = \varphi(x_0).$$

Заменяя x_0 на x, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода для неизвестной плотности $\upsilon(x)$

$$\upsilon(x) - 2\iint_{\Gamma^+} \upsilon(\xi) A_\xi \left[\varepsilon(\xi, x)\right] \xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+ = -2\varphi(x), \quad x \in \Gamma^+.$$

Используя формулы (24), (25) и (27) для предельных значений, а также граничные условия внутренней и внешней задач типа Дирихле и Неймана, получим интегральные уравнения для трех остальных задач. Для удобства выпишем все четыре уравнения вместе:

$$\upsilon(x) - 2\iint_{\Gamma^+} \upsilon(\xi) A_\xi \left[\varepsilon(\xi, x)\right] \xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+ = -2\varphi(x), \tag{29}$$

$$\upsilon(x) + 2\iint_{\Gamma^+} \upsilon(\xi) A_\xi \left[\varepsilon(\xi, x)\right] \xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+ = 2\psi(x), \tag{30}$$

$$\mu(x) + 2\iint_{\Gamma^+} \mu(\xi) A_x \left[\varepsilon(\xi, x)\right] \xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+ = 2g(x), \tag{31}$$

$$\mu(x) - 2\iint_{\Gamma^+} \mu(\xi) A_x \left[\varepsilon(\xi, x)\right] \xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+ = -2f(x). \tag{32}$$

Здесь A_ξ – производная по конормали к Γ^+ в точке $\xi \in \Gamma^+$, а A_x – производная по конормали к Γ^+ в точке $x \in \Gamma^+$.

Отметим следующие свойства интегральных уравнений (29)-(32):

1) уравнения (29)-(32) – интегральные уравнения со слабой особенностью.

2) ядра $A_\xi\left[\varepsilon(\xi, x)\right]$ и $A_x\left[\varepsilon(\xi, x)\right]$ получаются одно из другого перестановкой точек x и ξ. Так как эти ядра являются вещественными, то они сопряженные. Отсюда следует, что уравнения (29) и (32), а также уравнения (30) и (31) – попарно сопряженные. Для интегральных уравнений (29)-(32) справедливы теоремы Фредгольма.

§6. Исследование интегральных уравнений

Исследуем первую пару сопряженных интегральных уравнений (29) и (32). Докажем, что эти интегральные уравнения, соответствующие внутренней задаче типа Дирихле и внешней задаче типа Неймана, разрешимы, и притом единственным образом, при любых функциях $\varphi(x)$ и $f(x)$ из класса

$C_\alpha(\Gamma^+)$. С этой целью рассмотрим однородное интегральное уравнение внешней задачи типа Неймана

$$\mu_0(x) - 2\iint_{\Gamma^+} \mu_0(\xi) A_x[\varepsilon(\xi, x)] \xi_3^{-\blacksquare} d\Gamma^+ = 0 \cdot \qquad (33)$$

Пусть μ_0 – какое-нибудь ненулевое решение этого уравнения. Построим потенциал типа простого слоя с плотностью $\mu_0(x)$

$$V_0(x) = \iint_{\Gamma^+} \mu_0(\xi) \varepsilon(\xi, x) \xi_3^{-\blacksquare} d\Gamma^+ \cdot$$

Эта функция удовлетворяет условиям (17) – (19) внешней задачи типа Неймана и граничному условию

$$A[V_0(x)]_{\Gamma^+} = 0. \qquad (34)$$

По теореме единственности для внешней задачи типа Неймана

$$V_0(x) \equiv 0, \quad x \in D_e^+.$$

Так как потенциал типа простого слоя является непрерывной функцией в полупространстве E_3^+, то на Γ^+

$$V_0(x) \equiv 0.$$

Рассмотрим потенциал $V_0(x)$ в области D^+. В этой области функция $V_0(x)$ удовлетворяет условиям (7), (8) внутренней задачи типа Дирихле и граничному условию

$$V_0(x)\big|_{\Gamma^+} = 0 .$$

По теореме единственности для внутренней задачи типа Дирихле

$$V_0(x) \equiv 0, \quad x \in D^+.$$

Но тогда

$$A[V_0(x)] \equiv 0 , \quad x \in D^+ . \qquad (35)$$

Сопоставляя (35) с (34) и воспользовавшись формулой (25), получим, что $\mu_0(x) \equiv 0$.

Итак, однородное интегральное уравнение (33) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма интегральное уравнение (32) внешней задачи типа Неймана разрешимо, и притом единственным образом, для любой функции $f(x) \in C_\alpha(\Gamma^+)$. Таким образом, значение параметра $\lambda = 2$ – правильное для ядра $A_x[\varepsilon(\xi, x)]$; по известной теореме Фредгольма оно правильное и для сопряженного ядра $A_\xi[\varepsilon(\xi, x)]$.

Из третьей теоремы Фредгольма для сопряженного ядра следует, что интегральное уравнение внутренней задачи типа Дирихле (29) разрешимо, и притом единственным образом, для любой функции $\varphi(x) \in C_\alpha(\Gamma^+)$.

Если интегральные уравнения внутренней задачи типа Дирихле и внешней задачи типа Неймана разрешимы, то разрешимы сами задачи. Это приводит к следующим теоремам:

Теорема 8. Если Γ^{+} – поверхность Ляпунова и образует с плоскостью $x_1 = 0$ прямой угол, то внутренняя задача типа Дирихле для этой поверхности разрешима при любых функциях $\varphi(x) \in C_q(\Gamma^{+})$, и решение можно представить в виде потенциала типа двойного слоя.

Теорема 9. Если Γ^{+} – поверхность Ляпунова и образует с плоскостью $x_1 = 0$ прямой угол, то внешняя задача типа Неймана для этой поверхности разрешима при любых функциях $f(x) \in C_q(\Gamma^{+})$, и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.

Исследование второй пары сопряженных уравнений (30) и (31) проводится аналогично и приводит к следующим теоремам:

Теорема 10. Если Γ^{+} – поверхность Ляпунова и образует с плоскостью $x_1 = 0$ прямой угол, то внешняя задача типа Дирихле для этой поверхности разрешима при любых функциях $\psi(x) \in C_q(\Gamma^{+})$, и решение можно представить в виде потенциала типа двойного слоя.

Теорема 11. Если Γ^{+} – поверхность Ляпунова и образует с плоскостью $x_1 = 0$ прямой угол, то внутренняя задача типа Неймана для этой поверхности разрешима при любых функциях $g(x) \in C_q(\Gamma^{+})$, и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.

Литература

[1] А.В. Бицадзе. Уравнения математической физики. М.1976.

[2] Г.З. Хабибуллина. О потенциалах для одного вырождающегося эллиптического уравнения второго рода // Матем. моделирование и краевые задачи. Тр. всероссийской научной конф. Ч.3. 2004. С.223-225.