Н.Р. Хуснутдинов, А.Р. Хабибуллин

ЭНЕРГИЯ НУЛЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ БЕЗМАССОВОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ КОСМИЧЕСКОЙ СТРУНЫ КОНЕЧНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ.

I. Введение

Энергия нулевых колебаний массивного скалярного поля на фоне пространства космической струны для размерности пространства 2+1 и малых дефицитов угла была получена в [1]. Было показано, что энергия равняется нулю с точностью до квадрата дефицита угла. В данной работе мы получим общее выражение для энергии нулевых колебаний для произвольного дефицита угла и вычислим в явном виде энергию до четвертой степени малого дефицита угла. Мы рассматриваем 2+1 - мерное сечение пространства космической струны (z = const). Такое пространство описывает поле сферического тела с постоянной плотностью материи[2] в 2+1 гравитации.

Рассмотрим вначале модель пространства космической струны, предложенной Готтом [3], Хискоком [4] и Лине [5]. Модель представляет собой космическую струну ненулевой толщины r_0. Материя внутри струны имеет постоянную плотность энергии E и уравнение состояния $E+P=0$. Более общее распределение материи внутри струны было описано Лине [5].

Решение уравнений Эйнштейна с соответствующим тензором энергии-импульса в цилиндрических координатах, имеет следующую форму для внутренней и внешней областей струны:

$$ds_{in}^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \frac{\rho_0^2}{\varepsilon^2}\sin^2(\frac{\varepsilon\rho}{\rho_0})d\varphi^2 + dz^2\,, \tag{1a}$$

$$ds_{out}^2 = -dt^2 + dr^2 + \frac{r^2}{v^2}d\varphi^2 + dz^2. \tag{1b}$$

Пространство-время покрывается двумя картами; внутренняя часть (1a) координатами (t,ρ,φ,z): $(t,z)\in(-\infty,+\infty)$, $\rho\in[0,\rho_0]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, и внешняя (1b) координатами (t,r,φ,z): $(t,z)\in(-\infty,+\infty)$, $r\in[r_0,+\infty]$, $\varphi\in[0,2\pi]$. Пространство-время внутри струны – это пространство постоянной кривизны. Пространство-время внешней части струны (1b) является таким же, как и пространство-время бесконечно тонкой струны [6].

Метрика (1) и внешняя кривизна являются C^1 гладкими на поверхности струны, что ведет к исчезновению поверхностной энергии на поверхности струны, согласно Израилю [7]. "Внешний" r_0 и "внутренний" ρ_0 радиусы струны, и параметры ε и ν подчиняются уравнениям:

$$\frac{r_0}{\rho_0}=\frac{\tan\varepsilon}{\varepsilon},\ \cos\varepsilon=\frac{1}{\nu},\ \frac{\rho_0}{\rho_*}=\varepsilon,\ \rho_*=\frac{1}{\sqrt{8\pi E}}. \qquad (2)$$

Энергия μ на единицу длины струны, являющуюся произведением постоянной плотности энергии $E^2/8\pi\rho_0^2$ и площади поперечного сечения струны, не зависит от радиуса струны и равна $(1-\frac{1}{\nu})/4,$ как и для пространства-времени бесконечно тонкой струны. Напомним, что в случае размерности пространства-времени 2+1, E имеет размерность энергии на единицу площади и GE/c^4 имеет размерность обратного квадрата длины.

II. Энергия нулевых колебаний

Мы воспользуемся подходом, предложенным в статьях [8-11], в рамках которого энергия нулевых колебаний:

$$E(s)=\frac{1}{2}M^{2s}\sum_j\sum_{(n)}(\lambda^2_{(n)j}+m^2)^{1/2-s}=\frac{1}{2}M^{2s}\zeta_{\Im}(s-\frac{1}{2}), \qquad (3)$$

скалярного, массивного поля Φ выражается в терминах дзета-функции

$$\zeta_{\Im}(s-\frac{1}{2})=\sum_j\sum_{(n)}(\lambda^2_{(n)j}+m^2)^{1/2-s}, \qquad (4)$$

где $\Im=-\Delta+m^2+\xi R$ - оператор Лапласа. Здесь $\Delta=g^{kl}\nabla_k\nabla_l$ - двухмерный оператор Бельтрами. Собственные значения оператора $\lambda_{(n),j}+m^2$ оператора $\Im$ находятся из граничного условия

$$\Psi_{(n)}(\lambda,R)=0, \qquad (5)$$

где R означает некоторый параметр, характеризующий границу. Решения

$\lambda = \lambda_{(n)j}$ этого уравнения зависят от чисел (n), и, кроме того, имеют индексы, $j = 1,2,3,...,$ которые нумеруют решения граничного уравнения. Далее, согласно [8-11], преобразуем сумму ряда по j в дзета-функции в интеграл:

$$E(s) = -\frac{1}{2} M^{2s} \sum_{(n)} \frac{\cos \pi s}{\pi} \int_m^\infty dk (k^2 - m^2)^{1/2-s} \frac{\partial}{\partial k} \ln \Psi_{(n)}(ik, R), \qquad (6)$$

где функция $\Psi_{(n)}$ вычисляется на мнимой оси.

Выражение (6) расходится при $s \to 0$. Для перенормировки вычтем из $E(s)$ все слагаемые $E^{div}(s)$, которые останутся в пределе $m \to \infty$:

$$E^{div}(s) = \lim_{m \to \infty} E(s) \qquad (7)$$

и определим перенормированную энергию в следующем виде:

$$E^{ren} = \lim_{s \to 0} (E(s) - E^{div}(s)). \qquad (8)$$

Поскольку структура полюсов дзета-функции не зависит от значений параметров, очевидно, что в пределе $m \to \infty$ расходящаяся часть имеет структуру разложения ДеВитта-Швингера, которое в двухмерном случае имеет следующую форму:

$$E^{div}(s) = \left(\frac{M}{m}\right)^{2s} \frac{1}{8\pi} \left\{ B_0 m^3 \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} + \right. \qquad (9)$$

$$\left. + B_{\frac{1}{2}} m^2 \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} + B_1 m + B_{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \right\},$$

где B_α - коэффициенты теплового ядра. Для того чтобы выделить расходящуюся часть энергии, мы используем следующую процедуру [8-11]. Мы прибавим к и отнимем из подынтегрального выражения равномерное расхождение $\ln\Psi$ до степени m^0. Обозначим это разложение как $(\ln\Psi_{(n)})^{as}$. Используя эту процедуру, представим энергию в виде суммы

$$E(s) = E_{fin}(s) + E_{as}(s) \tag{10}$$

конечной (в пределе $s \to 0$) части

$$E_{fin}(s) = -\frac{1}{2}M^{2s}\sum_{(n)}\frac{\cos\pi s}{\pi}\int_m^\infty dk(k^2-m^2)^{1/2-s}$$
$$\frac{\partial}{\partial k}(\ln\Psi_{(n)}(ik,R) - (\ln\Psi_{(n)}(ik,R))^{as}), \tag{11}$$

и оставшейся от равномерного расхождения части

$$E_{as}(s) = -\frac{1}{2}M^{2s}\sum_{(n)}\frac{\cos\pi s}{\pi}\int_m^\infty dk(k^2-m^2)^{1/2-s}\frac{\partial}{\partial k}(\ln\Psi_{(n)}(ik,R)^{as}. \tag{12}$$

Последнее выражение содержит все члены, которые сохраняются в пределе $m \to \infty$.

Используя полученные выражения в уравнении (8), представим его в следующем виде

$$E^{ren} = E_{fin} + E_{as}^{fin}, \tag{13}$$

где

$$E_{fin} = E_{fin}(0) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{(n)}\int_m^\infty dk\sqrt{k^2-m^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial k}(\ln\Psi_{(n)}(ik,R) - (\ln\Psi_{(n)}(ik,R))^{as}), \tag{14a}$$

$$E_{as}^{fin} = \lim_{s\to 0}(E_{as}(s) - E^{div}(s)). \tag{14b}$$

Расходящаяся часть E^{div} определена уравнением (9).

Конечная часть E_{fin} вычисляется численно. Первая часть на практике находится следующем образом. Используя равномерное расхождение $(\ln \Psi_{(n)})^m$, вычисляем в явном виде $E_m(s)$ и затем в полученном выражении берем предел $m \to \infty$, (структура полюсов не меняется). Все члены, которые сохраняются в этом пределе, составляют разложение ДеВитта-Швингера (9), которое мы вычитаем в уравнении (14b). Этот путь предпочтительнее, потому что мы можем получить в явной форме коэффициенты теплового ядра. Вычисления коэффициентов теплового ядра в рамках этого подхода показывают, что подход применим как для гладких фонов, так и для многообразий с сингулярными поверхностями коразмерности один [12] и два [1], общие формулы для которых были получены в [13] и [14].

Используем этот подход для космической струны конечной толщины, метрика которой описывается уравнением (1) при *z=const*. Опуская некоторые промежуточные вычисления, получаем следующее выражение для регуляризованной энергии

$$E(s) = E^{thin}(s) + E^{\mathrm{int}}(s), \qquad (15)$$

где

$$E^{thin}(s) = -M^{2s}\frac{\cos(\pi s)}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_m^{\infty} dk (k^2 - m^2)^{1/2-s} \frac{\partial}{\partial k} \ln k^{-n\nu} I_{n\nu}(kR), \qquad (16)$$

является регуляризованной энергией нулевых колебаний для пространства-времени бесконечно тонкой космической струны (при $\xi = 0$), а внутренняя структура дает дополнительный вклад:

$$E^{\mathrm{int}}(s) = -M^{2s}\frac{\cos(\pi s)}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} d_n \int_m^{\infty} dk [k^2 - m^2]^{1/2-s} \frac{\partial}{\partial k} \ln k^{n(\nu-1)} f_n(ik), \qquad (17)$$

где функция Йоста на мнимой оси имеет следующий вид:

$$f_n(ik) = -\frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{\cos\varepsilon}}(\frac{kp_0}{\varepsilon})^{n+1}\{K'_{nv}(kr_0)P_\alpha^{-n}[\cos\varepsilon] + +K_{nv}(kr_0)P_\alpha^{-n'}[\cos\varepsilon]\frac{\varepsilon\sin\varepsilon}{kp_0}\}, \quad (18)$$

Наша цель состоит теперь в том, чтобы получить равномерное разложение для функции Йоста. Для этого мы используем равномерное расхождение функций Бесселя и их производных из [15] и равномерное расхождение функций Лежандра и их производных, полученное в [16]. Использование этих формул дает возможность получить выражения для энергии нулевых колебаний для произвольного угла и массы поля. Здесь мы обсудим только случай нулевых масс, $m = 0$. Мы хотели бы обратить внимание, что в случае размерности 2+1 не возникает проблем с пределом $m \to 0$.

Используя вышеуказанный подход, получаем следующее выражение для нулевой энергии колебаний для произвольного дефицита угла:

$$E^{ren} = \frac{\nu\sin^4\varepsilon}{2\pi r_0}E_0(\xi,\varepsilon), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} E_0(\xi,\varepsilon) = \frac{1}{\sin^2\varepsilon}\Bigg\{ & \nu\zeta'_R(-2) - \frac{\nu}{2}\sin^2\varepsilon(\frac{\varepsilon}{\tan\varepsilon} - 1) - \frac{\varepsilon}{24\sin\varepsilon} \\ & -(\xi - \frac{1}{8})\frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\left[\ln(2\pi\sin^2\varepsilon) + \frac{\tan\varepsilon}{2\varepsilon}\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{1+x^2\tan^2\varepsilon}dx\right] \\ & + \int_0^1 \ln f_0(z\sin^2\varepsilon)dz + \int_1^\infty[\ln f_0(z\sin^2\varepsilon) - (\ln f_0(z\sin^2\varepsilon))^{as}]dz \\ & + 2\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty[\ln f_n(z\sin^2\varepsilon) - (\ln f_n(z\sin^2\varepsilon))^{as}]dz \Bigg\} \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $(\ln f_n)^{as}$ - асимптотическое разложение $\ln f_n$. Численный анализ функции $E_0(\xi,\varepsilon)$ для различных ξ показывает, что нулевая энергия колебаний отрицательна для всех дефицитов угла. Для малого дефицита угла получаем приближенно

$$E^{ren} \approx -\frac{\eta \varepsilon^4}{2\pi r_0}, \qquad (21)$$

где $\eta = 0{,}05$ для $\xi = 0$ и $\eta = 0{,}02$ для $\xi = \frac{1}{6}$.

Аналогичные результаты для энергии Казимира были получены в работах [17-19]. Параметром малости, подобным параметру ε, является параметр $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, который характеризует малость отличия проницаемостей ε_1 и ε_2 диэлектрического цилиндра, при условии равенства скоростей света внутри и вне цилиндра. Энергия Казимира обращается в ноль с точностью до квадрата этого параметра. В [19] было показано, что энергия не равна нулю, а пропорциональна четвертой степени параметра.

В будущем мы планируем исследовать обратную реакцию энергии квантовых флуктуаций на метрический тензор.

Работа частично была поддержана грантом РФФИ № 02-02-17177.

Литература

[1] Khusnutdinov N.R. and Bordag M., Phys. Rev. D**59**, 064017 (1999).

[2] Gott J.R. and Alpert M., Gen. Rel. Grav. **16**, 243 (1984).

[3] Gott J.R., Astrophys. J. **288**, 422 (1985).

[4] Hiscock W.A., Phys. Rev. D**31**, 3288 (1985).

[5] Linet B., Gen. Rel. Grav. **17**, 1109 (1985).

[6] Vilenkin A., Phys. Rev. D**23**, 852 (1981).

[7] Israel W., Nuovo Cim. B**XLIV**, 1 (1966).

[8] Bordag M., J. Phys. A**28**, 755 (1995).

[9] Bordag M. and Kirsten K., Phys. Rev. D**53**, 5753 (1996).

[10] Bordag M., Elizalde E., and Kirsten K., J. Math. Phys., **37**, 895 (1996).
[11] Bordag M., Elizalde E., Kirsten K., and Leseduarte S., Phys. Rev. D**56**, 4896 (1997).
[12] Khusnutdinov N.R. and Sushkov S.V., Phys. Rev. D**65**, 084028 (2002).
[13] Gilkey P.B., Kirsten K. and Vassilevich D.V., Nucl. Phys. B**601**, 125 (2001).
[14] Fursaev D.V., Phys. Lett. B**334**, 53 (1994).
[15] Справочник по специальным функциям, под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган, М.: Наука, (1979).
[16] Khusnutdinov N.R., J. Math. Phys., **44**, 2320 (2003).
[17] Lambiase G., Nesterenko V.V. and Bordag M., J. Math. Phys. **40**, 6254 (1999).
[18] Milton K.A., Nesterenko A.V. and Nesterenko V.V., Phys. Rev. D**59**, 105009 (1999).
[19] Nesterenko V.V. and Pirozhenko I.G., Phys. Rev. D**60**, 125007 (1999).