О.А. Широкова

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЕКАНИЯ ЛИНЗЫ ЖИДКИХ УГЛЕВОДОРОДОВ ПО ЗЕРКАЛУ ГРУНТОВЫХ ВОД НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

Введение

Одним из источников загрязнения грунтовых вод могут послужить нерастворимые в воде жидкие загрязнители (нефтепродукты и другие углеводороды (УВ)) [1, 2]. Они просачиваются сквозь зону аэрации и, не смешиваясь с водой, образуют "линзу" на поверхности зеркала грунтовых вод (ЗГВ). При наличии даже небольшого наклона водоупора в 3-5° накопившаяся "линза" УВ начинает медленно двигаться в область разгрузки (овраг, берег реки, дренажный канал). В результате загрязненными оказываются не только некоторая поверхность зеркала грунтовых вод (ЗГВ), но и тот водосток, в который разгружаются загрязненные грунтовые воды. Причиной такого загрязнения являются утечки УВ сквозь микротрещины, дефекты в трубах и т.п. на нефтехранилищах. При этом формируется поверхностный источник малой интенсивности, но длительного действия. Целью данной работы является построение математической модели формирования "линзы" УВ и ее растекания по ЗГВ.

Рассмотрим задачу о растекании "линзы" УВ по ЗГВ, расположенному над наклонным неровным дном. "Линза" УВ образуется за счет поступления загрязнения с поверхности грунта на некоторой конечной площади (рис. 1). На практике известно, что площадь сечения струи загрязнения с глубиной существенно возрастает, поэтому область загрязнения ЗГВ много больше размеров поверхности источника.

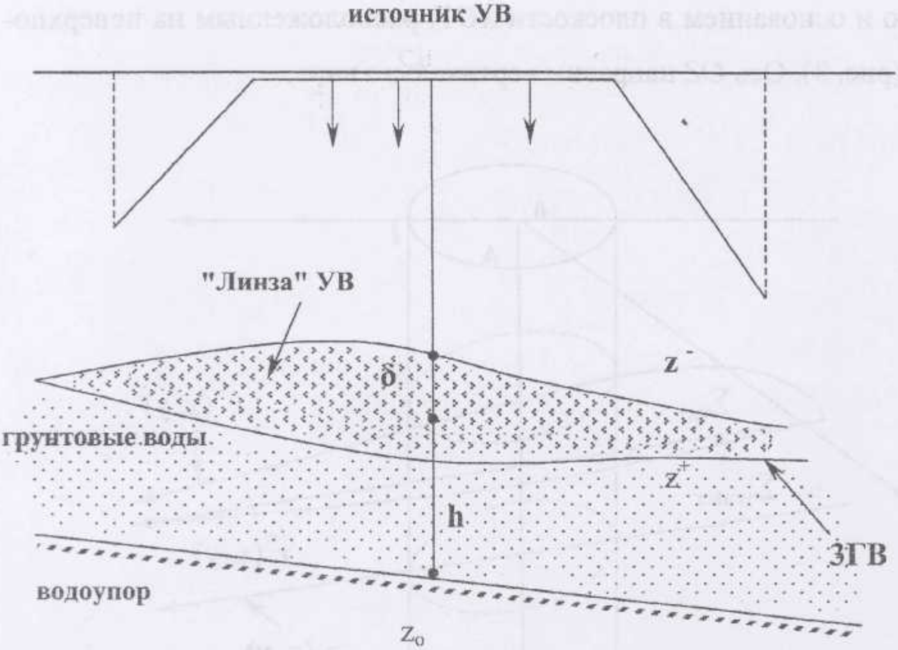

Рис. 1. Схема растекания УВ по ЗГВ (вертикальный разрез)

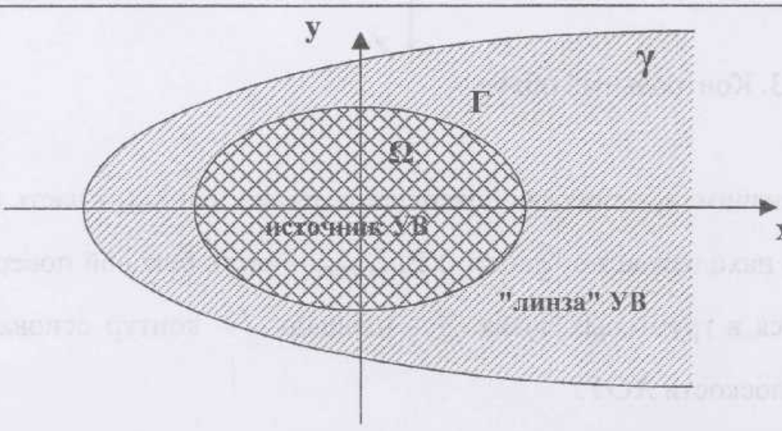

Рис. 2. Схема растекания УВ по ЗГВ (вид сверху)

Математическая постановка задачи

Система дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемую задачу, получается из условия баланса масс воды и УВ [1, 2]. В качестве контрольного объема возьмем цилиндр с вертикальной боковой поверхностью и основанием в плоскости *XOY*, расположенным на поверхности земли (рис. 3). Ось *OZ* направим вертикально вниз.

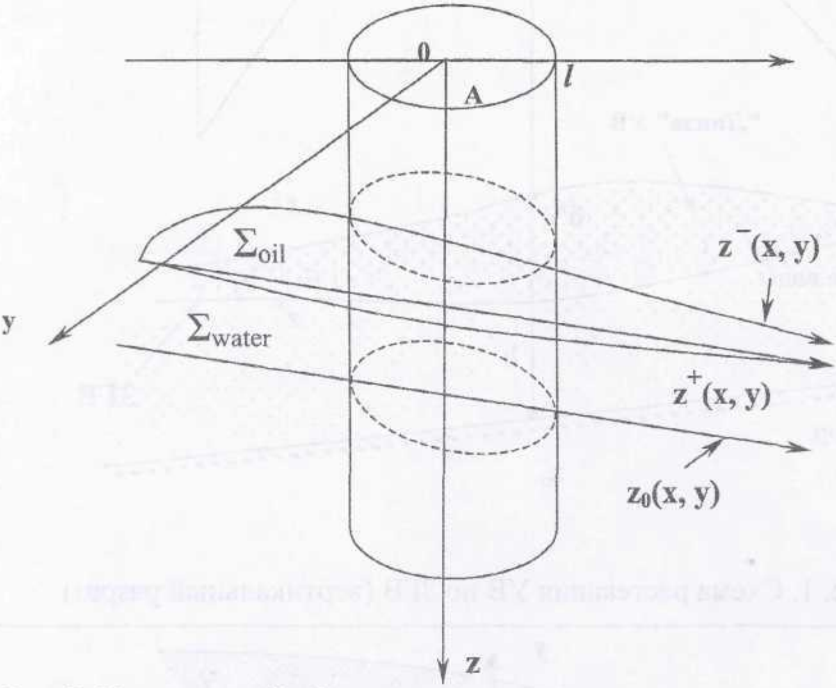

Рис. 3. Контрольный объем

Обозначим: Σ – боковая поверхность цилиндра, Σ_{oil} – часть бок. поверхности, находящаяся в "линзе" УВ, Σ_{water} – часть боковой поверхности, находящаяся в грунтовых водах. *A* – площадь, *l* – контур основания цилиндра в плоскости *XOY*.

Пусть $z = z_0(x, y)$ – уравнение поверхности водоупора грунтовых вод описывает наклонное русло: $z_0(x, y)=f(y)(H - \alpha x)$. Уравнения поверхности ЗГВ и линзы УВ: $z=z^+(x, y)$; : $z=z^-(x, y)$. Толщину "линзы" обозначим $\delta=z^+ - z^-$; мощность слоя грунтовых вод $h(x, y)=z^0 - z^+$ (рис. 3).

Следуя Буссинеску, предположим, что распределение давления жидкости по *z* гидростатическое:

$$\begin{cases} p_w = p_a + \rho_0 g \cdot \delta(x,y) + \rho_w g(z - z^+); \\ p_0 = p_a + \rho_0 g \cdot (z - z^-) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь p_a – атмосферное давление; индекс ***w*** *(water)* – относится к воде, индекс ***o*** *(oil)* – относится к УВ; g – ускорение силы тяжести.

Для записи балансовых соотношений необходимо подсчитать поток жидкости через боковую поверхность Σ контрольного объема:

$$\oint_\Sigma V_n \, d\Sigma.$$

Поскольку образующие Σ вертикальны, то для подсчета величины потока достаточно знать горизонтальные составляющие скорости фильтрации v_x и v_y. Согласно закону Дарси с учетом (1) имеем:

для УВ:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{K}{\mu_0}\frac{\partial P_0}{\partial x} = \frac{K}{\mu_0}\rho_0 g \frac{\partial z^-}{\partial x}; \\ v_y &= -\frac{K}{\mu_0}\frac{\partial P_0}{\partial y} = \frac{K}{\mu_0}\rho_0 g \frac{\partial z^-}{\partial y}; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

для воды:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{K}{\mu_w}\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{K}{\mu_w}\rho_w g \frac{\partial z^+}{\partial x}; \\ v_y &= -\frac{K}{\mu_w}\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{K}{\mu_w}\rho_w g \frac{\partial z^+}{\partial y}; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где K – проницаемость грунта, μ_0, μ_w – соответственно вязкости УВ и воды. Важно подчеркнуть, что в силу (2)-(3) значения v_x и v_y <u>не зависят от z</u> и определяются формой поверхностей $z=z^{\pm}(x, y)$. Поэтому интегрирование v_n по Σ сводится к интегрированию по контуру основания l, а затем – по основанию A.

Так, для УВ имеем:

$$\left.\begin{aligned} \oint\limits_{\Sigma_0} v_n d\Sigma &= \oint\limits_{l} \delta \cdot v_n dS; \\ \text{для воды: } \oint\limits_{\Sigma_w} v_n d\Sigma &= \oint\limits_{l} h \cdot v_n dS; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Запишем теперь сами балансовые соотношения.

Для УВ балансовое соотношение имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_A m\delta\, dA = -\int\limits_{\Sigma_0} v_n\, d\Sigma + \int\limits_A j(x,y,t)\, dA \tag{5}$$

где m – пористость. Физический смысл уравнения (5) состоит в том, что изменение во времени объема УВ в контрольном объеме обусловлено потоком через боковую границу, а также нижнее основание (оно непроницаемо для УВ) и верхнее основание (последнее слагаемое в (5)). Величина $j(x, y, t)$ равна объему УВ, поступающему в контрольный объем сверху через единицу площади A за единицу времени.

Поскольку $\oint\limits_{\Sigma_0} v_n\, d\Sigma = \int\limits_A \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dA$, и область A – произвольна, то интегральное соотношение (5) с учетом (2), (4) равносильно уравнению для УВ:

$$m\frac{\partial \delta}{\partial t} = \left(-\frac{K\rho_0 g}{\mu_0}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\frac{\partial z^-}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta\frac{\partial z^-}{\partial y}\right)\right] + j(x,y,t) \tag{6}$$

Запишем балансовое соотношение для воды: $\oint\limits_{\Sigma_0} v_n\, d\Sigma = \int\limits_A \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dA$.

Используя это соотношение, с учетом (3), (4) получим уравнение для воды:

$$m\frac{\partial\delta}{\partial t}=\frac{K\rho_0 g}{\mu_w}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)\right]-$$
$$-\frac{K\rho_w g}{\mu_w}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial z^+}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial z^+}{\partial y}\right)\right]. \qquad (7)$$

Учитывая, что $z^- = z_0 - h - \delta;\ z^+ = z_0 - h$, а также то, что уравнение поверхности водоупора $z_0(x, y)$ есть функция двух переменных, получим:

$$\frac{\partial z^-}{\partial x}=\frac{\partial z_0}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial\delta}{\partial x};\quad \frac{\partial z^-}{\partial y}=\frac{\partial z_0}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial\delta}{\partial y}.$$

Тогда из уравнения (6) получим:

$$m\frac{\partial\delta}{\partial t}=-\frac{K\rho_0 g}{\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(\delta\cdot(z_{0x}-h_x-\delta_x)\big)+\frac{\partial}{\partial y}\big(\delta\cdot(z_{0y}-h_y-\delta_y)\big)\right]+j(x,y,t);$$

или

$$m\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{K\rho_0 g}{\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(\delta\cdot z_{0x}\big)+\frac{\partial}{\partial y}\big(\delta\cdot z_{0y}\big)\right]=$$
$$=\frac{K\rho_0 g}{\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(\delta\cdot(h_x+\delta_x)\big)+\frac{\partial}{\partial y}\big(\delta\cdot(h_y+\delta_y)\big)\right]+j(x,y,t).$$

Введем оператор $\operatorname{div}\overline{a}$, действующий лишь в плоскости *(x, y)*: $\operatorname{div}\overline{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}$.

Предположим для простоты, что функция $z_0(x, y)$ – гармоническая, тогда получим уравнения для УВ:

$$m\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{K\rho_0 g}{\mu_0}\left(\nabla z_0\cdot\nabla\delta\right)=\frac{K\rho_0 g}{\mu_0}div\big(\delta\cdot\nabla(h+\delta)\big)+j(x,y,t) \qquad (8)$$

Аналогично рассуждая, из уравнения (7) для воды получим:

$$m\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{K\rho_w g}{\mu_w}\left(\nabla z_0\cdot\nabla\delta\right)=\frac{K\rho_0 g}{\mu_w}div\left(h\cdot\nabla\delta\right)+\frac{K\rho_w g}{\mu_w}div\left(h\cdot\nabla h\right) \quad (9)$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$x=L\cdot x';\quad y=L\cdot y';\ t=L\cdot t';\quad h=h_0\cdot h';\ \delta=\delta_0\cdot\delta';\ j=j_0\cdot j'.$$

Тогда уравнение (8) для УВ примет вид:

$$m\frac{\delta_0}{T}\frac{\partial\delta'}{\partial t'}+\frac{K\rho_0 g}{\mu_0}\left(\nabla z_0\cdot\frac{\delta_0}{L}\nabla\delta'\right)=$$

$$=\frac{K\rho_0 g}{\mu_0}\frac{\delta_0(h_0+\delta_0)}{L^2}\cdot div'\left(\delta'\cdot\nabla'(h'+\delta')\right)+j_0\cdot j'(x,\ y,\ t)$$

Домножим это уравнение на $\frac{T}{\delta_0}$, тогда

$$\begin{aligned}&m\frac{\partial\delta'}{\partial t'}+\frac{TK\rho_0 g}{\mu_0 L}\left(\nabla z_0\cdot\nabla\delta'\right)=\\&=\frac{K\rho_0 gT}{\mu_0 L}\frac{(h_0+\delta_0)}{L}\cdot div'\left(\delta'\cdot\nabla'(h'+\delta')\right)+\frac{T}{\delta_0}j_0\cdot j'(x,\ y,\ t)\end{aligned}\quad. \quad (10)$$

Приступим к согласованию масштабов. За основной пространственный масштаб примем характерный размер L зоны питания "линзы" УВ. Положим

$$\frac{K\rho_0 gT}{\mu_0 L}=1 \quad (11)$$

Это значит, что масштаб времени процесса равен времени фильтрации УВ под действием силы тяжести на расстоянии L. При этом уравнение (10) примет вид:

$$m\frac{\partial\delta'}{\partial t'}+\left(\nabla z_0\cdot\nabla\delta'\right)=\frac{(h_0+\delta_0)}{L}\cdot div\left(\delta'\cdot\nabla(h'+\delta')\right)+\frac{T\,j_0 j'}{\delta_0} \quad (12)$$

Теперь необходимо определить величину δ_0.

За характерное значение h_0 примем значение функции h вдали от области питания, например, на участке разгрузки, т.е.

$$\mathrm{h(x, y)}\Big|_{x,\, y \to \infty} = h_0$$

Характерное значение δ_0 должно выбираться из балансовых соотношений объемов УВ. С одной стороны, это объем УВ, поступающий через область питания размера L. Этот объем равен $\cong j_0 \cdot L^2$. С другой стороны, это объем УВ, стекающий по ЗГВ, в частности, объем отвода УВ через контур R, удаленный от области питания ($R>>L$). Этот объем равен $\cong v_0 2\pi R \delta_0$, где v_0 – скорость отвода, δ_0 - толщина линзы на участке разгрузки.

Из (2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} v_{ox} &= \frac{K\rho_0 g}{\mu_0} \cdot \frac{\partial z^-}{\partial x} = \frac{K\rho_0 g}{\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(z_0 - h - \delta); \\ v_{oy} &= \frac{K\rho_0 g}{\mu_0} \cdot \frac{\partial z^-}{\partial y} = \frac{K\rho_0 g}{\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(z_0 - h - \delta); \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $v_{o n} \cong \frac{K \rho_0 g}{\mu_0} \cdot \nabla (z_0 - h - \delta)$. Обозначим $\alpha \cong \left|\nabla z_0\right|_{\substack{x \\ y} \to \infty}$ на участке разгрузки. Поскольку при $x \to \infty,\ y \to \infty: \quad \nabla h \to 0,\ \nabla \delta \to 0$, то получим следующее соотношение для объема УВ на участке разгрузки: $\frac{K\rho_0 g}{\mu_0} \cdot \alpha \cdot R\delta_0;$ где R – расстояние от области питания до линии разгрузки. В результате из условия баланса объемов УВ получим:

$$\frac{K\rho_0 g}{\mu_0} \cdot \alpha \cdot R\delta_0 \cong j_0 \cdot L^2$$

Отсюда, учитывая (11):

$$\delta_0 = \frac{j_0 L^2 \mu_0 T}{K\rho_0 g\alpha RT} = \frac{j_0 LT}{\alpha R} \qquad (13)$$

Таким образом, задав характерный размер зоны питания L, можно определить масштаб времени процесса T и характерное значение δ_0. В итоге уравнение (12) примет вид:

$$m\frac{\partial \delta'}{\partial t'} + (\nabla z \cdot \nabla \delta') = (\lambda_2 + \lambda_1)\, div' (\delta' \cdot \nabla(h' + \delta')) + \lambda_3 j' \qquad (14)$$

где $\lambda_1 = \frac{j_0 T}{\alpha R};\ \lambda_2 = \frac{h_0}{L};\ \lambda_3 \cong \frac{\alpha R}{L}\ (R >> L)$. Учитывая, что α – малая величина, можно принять $\frac{\alpha R}{L} \cong 1$. Тогда $\lambda_3 \cong 1$, а $\lambda_1 = \frac{\delta_0}{L} = \frac{j_0 T}{L}$. Отсюда следует, что уравнение (14) для УВ имеет вид (штрихи опускаем):

$$m\frac{\partial \delta}{\partial t} + (\nabla z \cdot \nabla \delta) = (\frac{h_0}{L} + \frac{\delta_0}{L})\, div\,(\delta \cdot \nabla(h + \delta)) + j \qquad (15)$$

Перейдем к уравнению баланса для воды (9). При переходе к безразмерным переменным оно получит вид:

$$\frac{mh_0}{T}\frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{K\rho_w g}{\mu_w}\left(\nabla z_0 \cdot \frac{\delta_0}{L}\nabla \delta'\right) = \frac{K\rho_0 g}{\mu_w}\cdot\frac{h_0\delta_0}{L^2} div'(h' \cdot \nabla' \delta') +$$
$$+ \frac{K\rho_w g}{\mu_w}\cdot\frac{h_0 h_0}{L^2} div'(h' \cdot \nabla' h').$$

Домножим это уравнение на $\frac{T}{h_0}$ и получим:

$$m\frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\rho_w \mu_0}{\rho_0 \mu_w}\frac{\delta_0}{h_0}\frac{K\rho_0 gT}{\mu_0 L}(\nabla z_0 \cdot \nabla' \delta') = \frac{\mu_0}{\mu_w}\frac{K\rho_0 gT}{\mu_0 L}\cdot\frac{\delta_0}{L^2} div'(h' \cdot \nabla' \delta') +$$
$$+ \frac{\rho_w \mu_0}{\rho_0 \mu_w}\frac{K\rho_0 gT}{\mu_0 L}\cdot\frac{h_0}{L} div'(h' \cdot \nabla' h').$$

Учитывая соотношение (11) и обозначив $a_1 = \dfrac{\rho_w \mu_0}{\rho_0 \mu_w};\ a_2 = \dfrac{\mu_0}{\mu_w}$, получим уравнение для воды (штрихи опустим):

$$m\frac{\partial h}{\partial t} + a_1\frac{\delta_0}{h_0}\left(\nabla z_0 \cdot \nabla\delta\right) = a_2\frac{\delta_0}{L}div\,(h\cdot\nabla\delta) + a_1\frac{h_0}{L}div\,(h\cdot\nabla h) \quad (16)$$

Далее, рассмотрим случай "слабого" источника УВ, т.е. "линза" УВ – тонкая: $\dfrac{\delta_0}{h_0} = \varepsilon << 1$. Положим $\dfrac{h_0}{L} \cong 0.1$. Тогда уравнения для УВ и воды (15)-(16) примут вид:

$$m\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\nabla z_0 \cdot \nabla\delta\right) = (0.1 + 0.1\cdot\varepsilon)div\left(\delta\cdot\nabla(h+\delta)\right) + j(x,y,t) \quad (17);$$

$$m\frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon\cdot\left(\nabla z_0 \cdot \nabla\delta\right) = 0.1\cdot\varepsilon\cdot div\,(h\cdot\nabla\delta) + 0.1\,div\,(h\cdot\nabla h) \quad (18).$$

Таким образом, процесс растекания УВ по зеркалу грунтовых вод, расположенному на наклонном водоупоре, описывается системой уравнений (17)-(18) для толщины линзы δ и толщины водного слоя h с малым параметром ε.

Стационарный предел

Рассмотрим предельное стационарное состояние линзы при $t \to \infty$. Уравнения (17)-(18) примут вид:

$$\varepsilon\left(\nabla z_0 \cdot \nabla\delta\right) = 0.1\cdot\varepsilon\ div\left(\delta\cdot\nabla(h+\delta)\right) + 0.1\cdot div\left(\delta\cdot\nabla(h+\delta)\right) + j(x,y)$$

$$\varepsilon\left(\nabla z_0 \cdot \nabla\delta\right) = 0.1\cdot\varepsilon\ div\left(h\cdot\nabla\delta\right) + 0.1\cdot div\left(h\cdot\nabla h\right).$$

Проведем разложение по малому параметру ε. При ε=0 получим "опорную" задачу:

$$div(h\cdot\nabla h) = 0; \quad (19)$$

$$(\nabla z_0 \cdot \nabla \delta) = 0.1 \cdot div(\delta \cdot \nabla \delta) + j(x, y) \tag{20}$$

Уравнение (19) представляет собой уравнение Лапласа: $\Delta \dfrac{h^2}{2} = 0$.

Поскольку на границе разгрузки $h\big|_{x=R} = h_0$, то гармоническая функция $h(x, y) = h_0$ повсюду внутри области течения УВ.

Для решения уравнения (20) необходимо задать форму области питания УВ (область D) и вид функции $j(x,y)$. Пусть Ω – прямоугольник.

$$j(x, y) = \begin{cases} 1, x \in \Omega; \\ 0, x \notin \Omega. \end{cases}$$

Картина течения представлена на рис. 4. Линия $x=R$ представляет собой участок разгрузки потока воды и УВ. Полуширина струи УВ на линии разгрузки обозначена y_0. Область Ω – проекция области питания "линзы" УВ на поверхности земли. В области Ω: $j=1$. Вне Ω интенсивность питания $j=0$. Через γ обозначена граница области D – области течения УВ.

Зададим рельеф водоупора $z_0(x,y)$ в виде: $z_0(x,y) = f(y) \cdot (H - \alpha x)$, т.е. предположим, что водоупор – это наклонное русло. В частном случае наклонный водоупор можно предполагать плоским: $z_0(x) = (H - \alpha x)$. Тогда из уравнения (20) получим:

$$-\alpha \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0.1 \cdot div(\delta \cdot \nabla \delta) + j(x, y) \tag{21}$$

Уравнение (21) описывает поведение функции $\delta(x,y)$ внутри области D течения УВ (рис. 4).

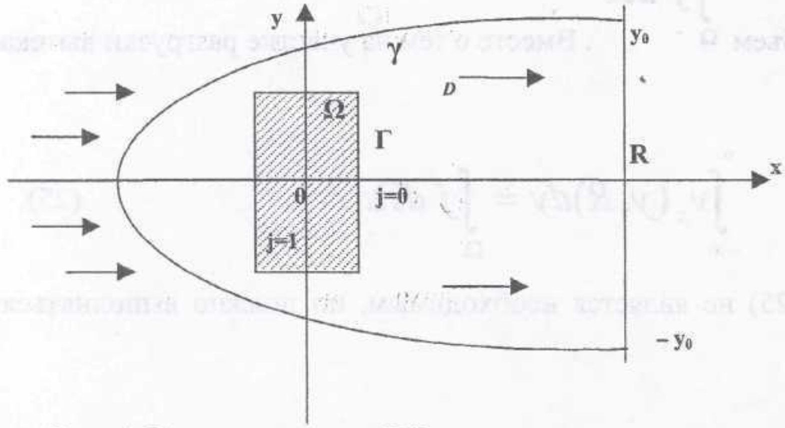

Рис. 4. Картина течения УВ.

Сформулируем граничные условия стационарной задачи. На границе γ в области D заданы два граничных условия:

$$\begin{cases} \delta = 0; & (22) \\ v_x \cdot n_x + v_y \cdot n_y = 0. & (23) \end{cases}$$

Уравнение (23) – это уравнение линии тока, на которой нормальная составляющая потока УВ равна нулю. На участке разгрузки при $x=R$ можно считать:

$$\left.\frac{\partial \delta}{\partial x}\right|_{x=R} = 0 \qquad (24)$$

Заметим, что граничные условия (22)-(24) для функции $\delta(x,y)$ однородны и поэтому определяют решение лишь с точностью до постоянной. Эта постоянная должна определяться интегральной интенсивностью источника и может быть определена из условия баланса объема УВ в области, занятой УВ.