

СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ MAPLE ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

© К.Б.Шакирова, О.В.Разумова

В статье демонстрируются графические возможности пакета символьной математики Maple при решении стереометрических задач школьного курса геометрии.

Ключевые слова: пространственное мышление, типы оперирования пространственными образами, компьютерное моделирование.

Курс стереометрии средней школы характеризуется направленностью на развитие пространственного мышления учащихся, что является одной из важных задач обучения математике. Для успешного изучения как теоретического, так и практического материала курса стереометрии одним из необходимых условий является умение мысленно представлять геометрические образы и их трансформации в пространстве. При этом в процессе обучения стереометрии возникает ряд проблемных ситуаций в области оперирования пространственными представлениями, т.к. многие схематические изображения статического характера, используемые в геометрии, требуют в процессе их чтения оперирования сложными динамическими пространственными образами [1]. Средства информационных технологий дают возможность помочь обучаемому сделать первый шаг, позволив увидеть процесс создания искомого образа на экране монитора компьютера.

Современная индустрия в области программного обеспечения персональных компьютеров предлагает широкий выбор программ для построения геометрических объектов и наглядного представления их специфических свойств. При выборе того или иного программного обеспечения необходимо учитывать степень его освоенности педагогической средой. В последние несколько лет распространение получил пакет символьной математики Maple. Этот пакет обладает большими возможностями программирования графики вплоть до создания анимационных графических клипов. В пакете Maple имеется богатый набор команд и процедур двумерной и трехмерной графики. Основные процедуры доступны пользователю по умолчанию, доступ к другим становится возможным после подключения графической библиотеки. Опции вывода могут изменяться пользователем при обращении к команде, а также в интерактивном режиме при работе в меню графики. Особенность языка программирования Maple состоит в том, что освоить

его может и неспециалист в области программирования.

Школьный курс стереометрии включает в себя довольно большое количество задач проблемного характера, требующих высокого уровня развития пространственного мышления школьников. Особое место в нем отводится задачам на три типа оперирования пространственными образами.

Первый тип оперирования характеризуется тем, что исходный образ в процессе решения задачи на движение мысленно видоизменяется в соответствии с условиями задачи, либо мысленное вращение, перемещение осуществляется при его создании. Так, при изучении темы "Многогранники и его элементы" в 11 классе ученикам предлагается решить цикл следующих задач на представление фигуры в воображении: нарисуйте многогранник, заданные проекциями, указанными на рис.1, на три попарно перпендикулярные плоскости [2].

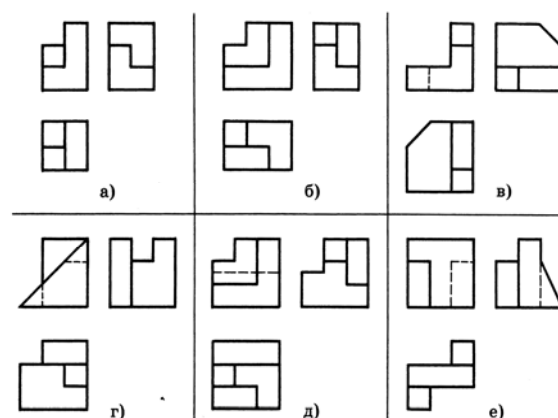


Рис.1

Также при рассмотрении темы "Объем" в том же классе встречается ряд задач, усложненных требованиями вычислительного характера. Например: многогранник задан некоторыми тремя проекциями. Какие замеры надо сделать на этих проекциях, чтобы вычислить его объем?

В ходе решения задач на данный тип оперирования пространственными образами у учеников могут возникнуть определенные трудности с созданием динамических образов искомым фигур. Поэтому учитель должен обладать набором подсказок-визуализаций, которые могут облегчить мыслительный процесс ученика. В качестве примера приведем программу на языке Maple, которая иллюстрирует динамический образ фигуры из первой выше приводимой задачи пункта г).

```
> with(plots): with(plottools):
A:=plot3d([x,y,3],x=0..2,y=0..1,grid=[2,2]):
B:=plot3d([2,x,y],x=0..1,y=0..3,grid=[2,2]):
C:=plot3d([x,1,y],x=0..2,y=0..3,grid=[2,2]):
DD:=plot3d([x,0,y],x=0..2,y=0..3,grid=[2,2]):
E:=plot3d([x,y,2],x=0..1,y=1..2,grid=[2,2]):
F:=plot3d([0,x,y],x=0..1,y=0..3,grid=[2,2]):FF:=plot3d([0,x,y],x=2..3,y=2..3,grid=[2,2]):
G:=plot3d([0,x,y],x=1..3,y=0..2,grid=[2,2]):
K:=plot3d([x,y,0],x=0..3,y=1..3,grid=[2,2]):
M:=plot3d([x,y,0],x=0..2,y=0..1,grid=[2,2]):
N:=plot3d([3-2*y,3-2*x,2*y],x=0..1,y=0..1,grid=[2,2]): P:=plot3d([1-y,3-x,2+y],x=0..1,y=0..1,grid=[2,2]): T:=plot3d([3-x,3,y],x=0..3,y=0..x,grid=[2,2]): S:=plot3d([1-x,2,2+y],x=0..1,y=0..x,grid=[2,2]): SS:=plot3d([3-x,1,y],x=0..1,y=0..x,grid=[2,2]):
ST:=plot3d([1+x,1,2-y],x=0..1,y=0..x,grid=[2,2]):
plots[display]([A,B,C,DD,E,F,FF,G,K,M,N,P,T,S,SS],style=patch,scaling=constrained);
```

Результатом программы служит анимированная трехмерная модель фигуры, представленная на рис.2, способствующая устранению возникшей трудности в создании нового образа на базе исходного.

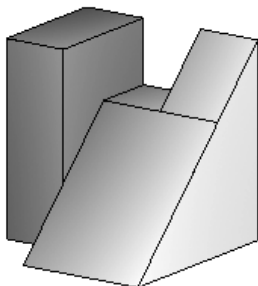


Рис.2

Второй тип оперирования пространственными образами характеризуется тем, что исходный образ под влиянием задачи преобразуется по структуре. Особое место данного рода задачам в стереометрическом курсе отводится в разделе

"Преобразования". Базовой задачей данного раздела служит задача о нахождении фигуры вращения, полученной в результате вращения отрезка вокруг оси, скрещивающейся с ним. Результат вращения (параболический гиперболоид или гиперболоид вращения) не известен учащимся. Задача требует высокого уровня пространственного мышления по манипулированию динамическими образами фигур, поэтому ее решение рекомендуется, во-первых, предварить решением следующих подзадач: представить результат вращения отрезка вокруг оси: а) перпендикулярной к нему и проходящей через один из его концов; б) пересекающей его в одном из его концов и не перпендикулярной к нему; в) пересекающей его во внутренней точке; г) параллельной ему; г) скрещивающейся с ним. Во-вторых, каждая из подзадач требует визуализации. Приведем программу анимации итоговой задачи в среде математического пакета Maple:

```
> with(plottools):with(plots):
ff:=PLOT3D(CURVES([[1,1,0],[0,1,0]],COLOR(HUE,0.7),THICKNESS(1)),STYLE(PATCH)):
fff:=PLOT3D(CURVES([[0,0,0],[1,1,1]],COLOR(HUE,0.9),THICKNESS(3))):
f:=display([ff,fff]): RTS=[seq(U[k],k=0..40)]:
for k from 0 to 40 do b:=k*0.25*Pi:
U[k]:=rotate(f,b,[0,0,0],[1,1,1]): end do:
RRT=[seq(Y[j],j=0..40)]: for j from 0 to 40 do
RRS=[seq(T[i],i=0..j)]:
for i from 0 to j do b:=i*0.12*Pi:
T[i]:=rotate(f,b,[0,0,0],[1,1,1]): end do:
Y[j]:=plots[display](RRS[],scaling=constrained,style=patch):end do:
display(RTS[],RRT[],insequence=true,scaling=constrained,style=patch);
```

Результат формирования фигуры представлен на рис.3.

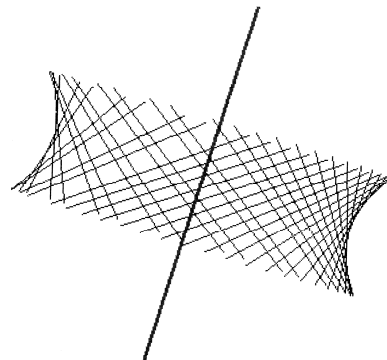


Рис.3

На основе рассмотренной базовой задачи решается большое количество задач, в том числе из цикла "Вращение многогранников и их комбинаций". Примером служит следующее упражнение: нарисуйте тело, полученное при вращении куба вокруг ребра, диагонали. Степень мысленной активности учащихся в данном случае намного выше той, которая наблюдалась при первом типе оперирования, поскольку реконструкция исходного образа более радикальна. В этих условиях представить все необходимые изменения и воплотить новый образ в воображении бывает довольно сложно, поэтому возникает вновь необходимость в различных формах графической наглядности.

Приведем программы, выполненные на Maple-языке для визуализации построения фигуры первой и второй подзадачи соответственно:

```
> with(plottools):with(plots):
f:=cuboid([0,0,0],[1,1,1]):fff:=PLOT3D(CURVES([[0,-0.5,0],[0,1.5,0]]),COLOR(HUE,0.9),THICKNESS(3)):
f:=display([ff,fff]): RTS:=seq(U[k],k=0..40):
for k from 0 to 40 do b:=k*0.25*Pi:
U[k]:=rotate(f,b,[0,0,0],[0,1,0]): end do:
RRT:=seq(Y[j],j=0..15): for j from 0 to 15 do
RRS:=seq(T[i],i=0..j): for i from 0 to j do
b:=i*0.125*Pi:
T[i]:=rotate(f,b,[0,0,0],[0,1,0]): end do:
Y[j]:=plots[display](RRS[,scaling=constrained,style=patch]):end do:
display(RTS[,RRT[,insequence=true,scaling=constrained,style=patch]):
```

Результат вращения представлен на рис.4.

```
> with(plottools):with(plots):
ff:=cuboid([0,0,0],[1,1,1]):
fff:=PLOT3D(CURVES([[0.5,-0.5,-0.5],[1.5,1.5,1.5]]),COLOR(HUE,0.9),THICKNESS(3)):
f:=display([ff,fff]): RTS:=seq(U[k],k=0..40):
for k from 0 to 40 do b:=k*0.25*Pi:
U[k]:=rotate(f,b,[0,0,0],[1,1,1]): end do:
RRT:=seq(Y[j],j=0..15): for j from 0 to 15 do
RRS:=seq(T[i],i=0..j): for i from 0 to j do
b:=i*0.125*Pi:
T[i]:=rotate(f,b,[0,0,0],[1,1,1]): end do:
Y[j]:=plots[display](RRS[,scaling=constrained,style=patch]):end do:
display(RTS[,RRT[,insequence=true,scaling=constrained,style=patch]):
```

Результат вращения представлен на рис.5.

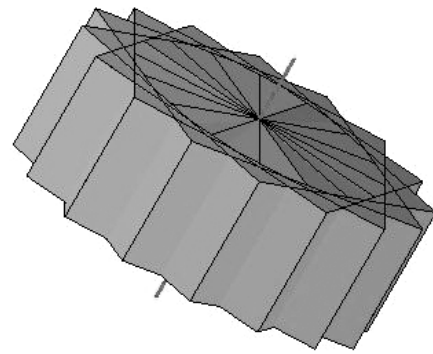


Рис.4

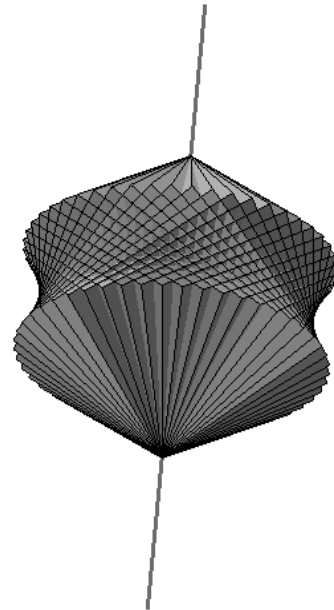


Рис.5

Чертежи искомых фигур ученик выполняет самостоятельно в рамках законов проективной геометрии (рис.6, 7).

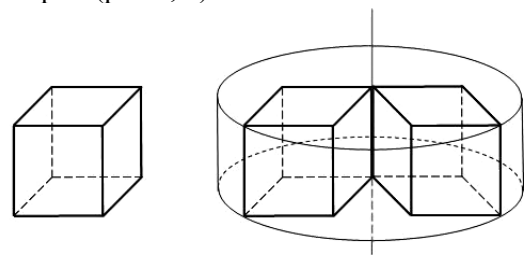


Рис.6

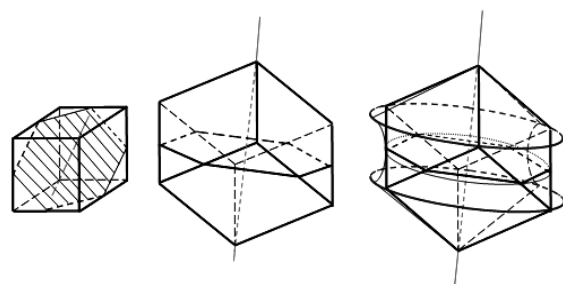


Рис.7

При третьем типе оперирования пространственными образами исходный образ является первичной основой для создания нового образа, возникающего путем неоднократных преобразований исходного. Задачи на данный тип оперирования осложняются тем, что учащиеся должны вовремя отвлекаться от исходного образа, удерживать в памяти все мысленные его преобразования и в результате создать новый образ. Примерами служат следующие упражнения: 1) изобразите пересечение и объединение исходного и полученного многогранников, если правильный тетраэдр повернули на 90° вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, 2) изобразите пересечение и объединение исходного и полученного многогранников, если куб повернули на 90° вокруг прямой, соединяющей середины параллельных ребер, не лежащих в одной грани.

Приведем программу для визуализации первой задачи с итоговой моделью (рис.8) и искомым чертежом (рис.9):

```
> with(plots):with(plottools):
f:=PLOT3D(POLYGONS([[0,0,0],[1,0,0],
[0.5,0.5*sqrt(3.0),0]],
[[1,0,0],[0.5,0.5*sqrt(3.0),0],[0.5,sqrt(3.0)/6,sqrt(6.0)/3]],
[[0,0,0],[1,0,0],[0.5,sqrt(3.0)/6,sqrt(6.0)/3]],
[[0,0,0],[0.5,0.5*sqrt(3.0),0],[0.5,sqrt(3.0)/6,sqrt(6.0)/3]]),
STYLE(PATCH)):
g:=rotate(f,Pi/2,[[0.5,0,0],[0.5,sqrt(3.0)/3,sqrt(6.0)/6]]):
display([f,g],scaling=constrained);
```

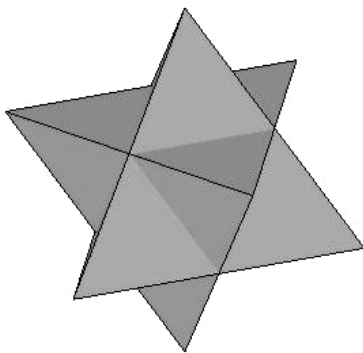


Рис.8

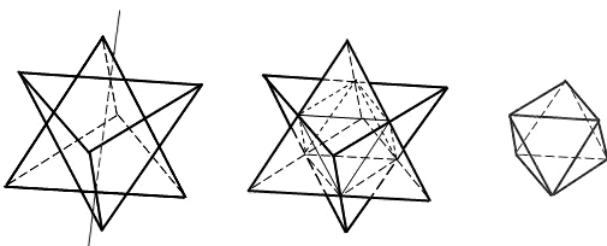


Рис.9

Программа, иллюстрирующая динамический образ фигуры из второй приводимой задачи с итоговой анимацией и чертежом (рис.10 и рис.11 соответственно) следующая:

```
> with(plots):with(plottools):
f:=PLOT3D(POLYGONS([[0,0,0],
[1,0,0],[1,1,0],[0,1,0]],
[[0,0,0],[0,1,0],[0,1,1],[0,0,1]],
[[1,0,0],[1,1,0],[1,1,1],[1,0,1]],
[[0,0,0],[1,0,0],[1,0,1],[0,0,1]],
[[0,1,0],[1,1,0],[1,1,1],[0,1,1]],
[[0,0,1],[1,0,1],[1,1,1],[0,1,1]]),
TITLE(CUBE),STYLE(PATCH)):
g:=rotate(f,Pi/2,[[0,0,0.5],[1,1,0.5]]):display([f,g],scaling=constrained);
```

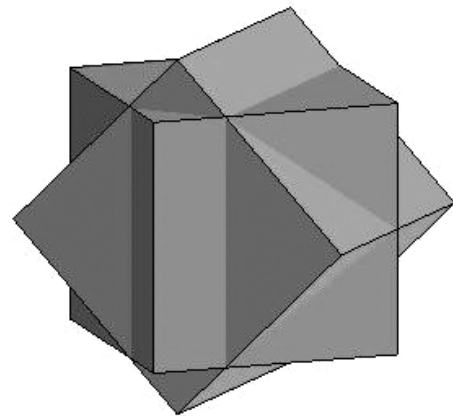


Рис.10

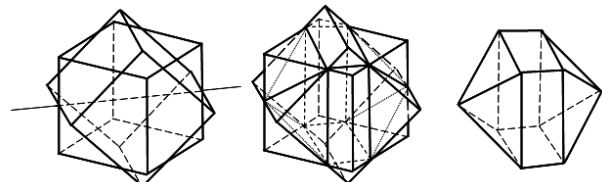


Рис.11

Типы оперирования пространственными образами рассматриваются как уровни развития пространственного мышления учащихся. Поэтому курс изучения стереометрии должен предусматривать решение заданий на перечисленные типы оперирования пространственными образами. Следует также отметить, что не каждый ученик обладает развитым пространственным воображением и может привлечь его при решении задач в курсе стереометрии, но это качество мышления можно развить обучением черчению, решением задач на пространственные представления и т.д. Развитию пространственного воображения способствует сочетание традиционных методов и информационных компьютерных технологий в изучении стереометрии, что делает возможным в свою очередь представить такой тип взаимообусловленной деятельности учителя и учащихся, который направлен на развитие по-

знавательной деятельности учащихся, на разрешение многих психолого-педагогических проблем, связанных с процессом обучения геометрических разделов математики.

1. *Гусев В.А.* Методика обучения геометрии: учеб. пособ. / Под ред. В.А.Гусева. – М.: Издат. центр "Академия", 2004. – 368 с.
2. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия: учеб. для учащихся 11 кл. с углубл. изучением математики. – М.: Просвещение, 2000. – 318 с.

THE SYSTEM OF COMPUTER MODELLING MAPLE FOR THE SOLUTION OF STEREOMETRIC PROBLEMS IN THE SCHOOL COURSE OF GEOMETRY

K.B.Shakirova, O.V.Razumova

The article presents graphic possibilities of a package of symbolical mathematics Maple in the solution of stereometric problems in the school course of Geometry.

Key words: spatial thinking, operating types in the spatial images, computer modeling.

Шакирова Кадрия Бариевна – кандидат педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой теории и методики обучения математике Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: ffmo@tggpu.ru

Разумова Ольга Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и методики обучения математике Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: ffmo@tggpu.ru