УДК 517.956

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО МНОГОМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

© А.М.Нигмедзянова

В работе доказывается существование и единственность решения основных краевых задач для одного многомерного сингулярного эллиптического уравнения методом потенциалов.

Ключевые слова: основная краевая задача, многомерное сингулярное эллиптическое уравнение, метод потенциалов.

Введение

Пусть E_p^+ – полупространство $x_p > 0$ p-мерного евклидова пространства точек $x = \left(x', x_p\right)$, $x' = \left(x_1, x_2, ..., x_{p-1}\right)$, D – конечная область в E_p^+, ограниченная открытой частью Γ_0 гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью Γ.

В работе исследованы внутренние и внешние краевые задачи Дирихле и Неймана для многомерного сингулярного эллиптического уравнения вида

$$T\left[U(x)\right] = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + x_p^{-k} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^k \frac{\partial U}{\partial x_p}\right) = 0, \qquad (1)$$

где $0 < k < 1$, $p \geq 3$.

С помощью замены $\xi_j = x_j$, $j = \overline{1, p-1}$, $\xi_p = \left(\dfrac{x_p}{1-k}\right)^{1-k}$ сингулярное эллиптическое уравнение (1) сводится к вырождающемуся эллиптическому уравнению

$$\xi_p^{\frac{2k}{1-k}} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_p^2} = 0,$$

которое имеет широкое применение в физике. Математическое моделирование физических процессов часто приводит к краевым задачам для вырождающихся эллиптических уравнений. Имеется значительное число работ, посвященных исследованию таких задач (например, обзор в книге [1]). Необходимость изучения таких уравнений обусловлена многочисленными их приложениями в газовой динамике, теории оболочек, теории упругости, механике сплошной среды и др. В частности, такие уравнения были исследованы Ф.Г.Мухлисовым [2].

Первые работы по вырождающимся эллиптическим уравнениям относятся к уравнению вида

$$y^m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \left(m > 0\right), \qquad (2)$$

различные краевые задачи для которого исследованы Ф.Трикоми [3], Е.Хольмгреном [4], С.Геллерстедтом [5; 6], Ф.И.Франклем [7], П.Жерменом, Р.Бадером [8; 9] и др.

Ф.Трикоми в фундаментальной работе [3] рассмотрел задачу Дирихле. С.Геллерстедт [5; 6] показал, что задача Дирихле и задача N могут быть решены при помощи функции Грина, регулярная часть которой в случае произвольной области D ищется в виде потенциала двойного слоя с плотностью $\mu(t)$. Для плотности $\mu(t)$ получается уравнение Фредгольма, причем предполагается, что концы кривой Γ совпадают с дугами нормальной кривой $\left(x - x_0\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = k^2$ $\left(y > 0\right)$. Ф.И.Франклю в статье [7] удалось избавиться от этого ограничения. Он сводит обе рассматриваемые краевые задачи к уравнениям Фредгольма, причем предполагается, что кривая Γ подходит к оси абсцисс в точках A и B под прямым углом.

А.В.Бицадзе [10; 11] доказал существование и единственность решения задачи Дирихле для уравнения

$$y^m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a\left(x, y\right) \frac{\partial U}{\partial x} +$$

$$+ b\left(x, y\right) \frac{\partial U}{\partial y} + c\left(x, y\right) U = 0 \ \left(m > 0\right).$$

К.Е.Бабенко [12] исследовал задачу N как для уравнения (2), так и для более общего уравнения

$$y^m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c\left(x, y\right) U = 0$$

при предположении, что в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняется условие $\left|\dfrac{dx}{dy}\right| \leq C y^2\left(s\right)$, где C – постоянная, а $x = x\left(s\right)$, $y = y\left(s\right)$ – параметрические уравнения кривой Γ.

И.Н.Векуа [13] получил явные формулы для решения задачи Дирихле в полуплоскости $y \geq 0$ для уравнения $y^{2k}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ $(k>-1)$.

1. Фундаментальное решение

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$U(x)=\left(\rho_1^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{k}{2}\right)}\omega(\sigma), \tag{3}$$

где $\sigma=\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$, $\rho^2=\sum\limits_{j=1}^{p-1}\left(x_j-x_{j_0}\right)^2+\left(x_p-x_{p_0}\right)^2$,

$$\rho_1^2=\sum_{j=1}^{p-1}\left(x_j-x_{j_0}\right)^2+\left(x_p+x_{p_0}\right)^2.$$

Подставляя функцию (3) в уравнение (1), получаем:

$$\sigma(1-\sigma)\omega''+\left[\frac{p}{2}-\left(\frac{p}{2}+k\right)\sigma\right]\omega'-\frac{k}{2}\left(\frac{p-2}{2}+\frac{k}{2}\right)\omega=0. \tag{4}$$

Известно ([1], С.40), ([14], гл.V, пп.100, 101), что в окрестности точки $\sigma=1$ одно из линейно-независимых решений уравнения (4) имеет вид:

$$\omega(x,x_0)=(1-\sigma)^{1-k}F\left(1-\frac{k}{2},\frac{p}{2}-\frac{k}{2},2-k;1-\sigma\right)=\sigma^{-\frac{p-2}{2}}(1-\sigma)^{1-k}F\left(1-\frac{k}{2},2-\frac{p}{2}-\frac{k}{2},2-k;1-\sigma\right). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (3), получаем решение уравнения (1)

$$E(x,x_0)=a\left(\rho_1^2\right)^{-\frac{k}{2}}\left(\rho^2\right)^{-\frac{p-2}{2}}(1-\sigma)^{1-k}\times F\left(1-\frac{k}{2},2-\frac{p}{2}-\frac{k}{2},2-k;1-\sigma\right), \tag{6}$$

где a – некоторая постоянная, $F(a,b,c;z)$ – гипергеометрическая функция.

Учитывая [15:280], что при $|z|<1$

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z),$$

последнее равенство можем записать в следующем виде

$$E(x,x_0)=a\left(\rho_1^2\right)^{-\frac{k}{2}}\left(\rho^2\right)^{-\frac{p-2}{2}}(1-\sigma)^{1-k}\times\sigma^{\frac{p-2}{2}}F\left(1-\frac{k}{2},\frac{p}{2}-\frac{k}{2},2-k;1-\sigma\right)=$$

$$=a\left(\rho_1^2\right)^{\frac{k}{2}-\frac{p}{2}}\left(4x_px_{p_0}\right)^{1-k}F\left(1-\frac{k}{2},\frac{p}{2}-\frac{k}{2},2-k;1-\sigma\right).$$

В силу известной формулы [15: 280]:

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\times F(a,b;a+b-c+1;1-z)+(1-z)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\times F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)$$

решение (6) может быть представлено в виде

$$E(x,x_0)=a\left(\rho_1^2\right)^{-\frac{k}{2}}\left(\rho^2\right)^{-\frac{p-2}{2}}\times(1-\sigma)^{1-k}\frac{\Gamma(2-k)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\frac{k}{2}\right)}\times F\left(1-\frac{k}{2},2-\frac{p}{2}-\frac{k}{2},2-\frac{p}{2};\sigma\right)+$$
$$+a\left(\rho_1^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{k}{2}\right)}(1-\sigma)^{1-k}\frac{\Gamma(2-k)\Gamma\left(-\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}-\frac{k}{2}\right)}\times F\left(1-\frac{k}{2},\frac{p}{2}-\frac{k}{2},\frac{p}{2};\sigma\right). \tag{7}$$

Отсюда следует, что решение (7) имеет степенную особенность вида ρ^{2-p} и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке x_0.

С помощью ряда Гаусса, разложения функций $(1-\sigma)^{1-k}$ и $\left(1+\frac{\rho^2}{4(x_px_{p_0})}\right)^{-\frac{k}{2}}$ при малых значениях ρ в степенной ряд, фундаментальное решение (7) запишем в виде

$$E(x,x_0)=\widetilde{E}(x,x_0)+E^*(x,x_0),$$

где

$$\widetilde{E}(x,x_0)=a\frac{\Gamma(2-k)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\frac{k}{2}\right)}\frac{\left(x_px_{p_0}\right)^{-\frac{k}{2}}}{2^k}\left(\rho^2\right)^{-\frac{p-2}{2}},$$

$E^*(x,x_0)$ – регулярная часть фундаментального решения $E(x,x_0)$.

Нетрудно проверить, что

$$E(\xi,x)=O\left(x_p^{1-k}\right)\ \text{при}\ x_p\to 0,\qquad x_p^k\frac{\partial E(\xi,x)}{\partial x_p}=O(1)\ \text{при}\ x_p\to 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial E(\xi,x)}{\partial x_p}=O\left(\xi_p^{1-k}\right)\ \text{при}\ \xi_p\to 0, \tag{9}$$

$$E(x,x_0)=O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{k}{2}\right)}\right)\ \text{при}\ r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2}\to\infty. \tag{10}$$

$$\frac{\partial E(x,x_0)}{\partial n} = O\left(\rho_0^{2-p-k}\right) \text{ при }$$
$$r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_p^2} \to \infty,$$

где $\rho_0^2 = \sum_{j=1}^{p-1} x_j^2 + x_p^2$.

2. Формулы Грина

Пусть функции $U, V \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что имеет место тождество

$$VT[U] + \left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_p}\frac{\partial U}{\partial x_p} \right) = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(V\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) + x_p^{-k}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(x_p^k V\frac{\partial U}{\partial x_p}\right). \qquad (11)$$

Умножая обе части тождества (11) на x_p^k, интегрируя обе части тождества по области D и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\int_D VT[U] x_p^k dx + \int_D \left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_p}\frac{\partial U}{\partial x_p} \right) x_p^k dx = \int_\Gamma V\frac{\partial U}{\partial n} x_p^k d\Gamma + \int_{\Gamma_0} V\frac{\partial U}{\partial n} x_p^k dx', \qquad (12)$$

где n – внешняя нормаль к Γ. Формула (12) называется первой формулой Грина для оператора T.

Меняя местами U и V в формуле (12) и вычитая полученное равенство из (12), имеем

$$\int_D [VT[U] - UT[V]] x_p^k dx = \int_\Gamma \left[V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right] x_p^k d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \left[V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right] x_p^k dx'. \qquad (13)$$

Формула (13) называется второй формулой Грина для оператора T.

3. Интегральное представление

Пусть функция $U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ – решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее условию

$$U(x) = O\left(x_p^{1-k}\right) \text{ при } x_p \to 0. \qquad (14)$$

Зададим в области D произвольную точку x_0. Вырежем эту точку шаром $Q_{x_0\varepsilon}$. Радиус ε возьмем столь малым, чтобы шар $Q_{x_0\varepsilon}$ целиком находился внутри области D. В области $D_\varepsilon = D \setminus \bar{Q}_{x_0\varepsilon}$ фундаментальное решение $E(x,x_0)$ уравнения (1) (т.е. (7)) принадлежит классу $C^2(D_\varepsilon) \cap C^1(\bar{D}_\varepsilon)$. Применяя к функциям $U(x)$ и $E(x,x_0)$ в области D_ε вторую формулу Грина для оператора T, получаем

$$\int_{D_\varepsilon} \left[E(x,x_0) E[U(x)] - U(x) E[E(x,x_0)] \right] x_p^k dx = \int_\Gamma \left[E(x,x_0)\frac{\partial U(x)}{\partial n} - U(x)\frac{\partial E(x,x_0)}{\partial n}\right] x_p^k d\Gamma +$$
$$+ \int_{\Gamma_0} \left[E(x,x_0)\frac{\partial U(x)}{\partial n} - U(x)\frac{\partial E(x,x_0)}{\partial n}\right] x_p^k dx' + \int_{S_{x_0\varepsilon}} \left[-E(x,x_0)\frac{\partial U(x)}{\partial n} + U(x)\frac{\partial E(x,x_0)}{\partial n}\right] x_p^k dS_{x_0\varepsilon}.$$

Переходя в последней формуле к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\int_\Gamma \left[E(x,x_0)\frac{\partial U(x)}{\partial n} - U(x)\frac{\partial E(x,x_0)}{\partial n}\right] x_p^k d\Gamma = a(p-2)\frac{\Gamma(2-k)\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\frac{k}{2}\right)}\frac{1}{2^k}U(x_0)\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

Полагая в этой формуле $a = \frac{2^k\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}-\frac{k}{2}\right)}{4\pi^{\frac{p}{2}}\Gamma(2-k)}$, получаем интегральное представление решения уравнения (1).

Таким образом, для всякой функции $U(x)$, удовлетворяющей условиям:

a) $U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$,

b) $E[U(x)] = 0,\ x \in D$,

c) $U(x) = O\left(x_p^{1-k}\right)$ при $x_p \to 0$

и для любой точки $x_0 \in D$ справедливо следующее интегральное представление

$$U(x_0) = \int_\Gamma \left[E(x,x_0)\frac{\partial U(x)}{\partial n} - U(x)\frac{\partial E(x,x_0)}{\partial n}\right] x_p^k d\Gamma. \qquad (15)$$

4. Свойства решений уравнения

Из интегрального представления (15) вытекают следующие свойства решения уравнения (1):

1°. Существуют решения $U(x)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющие условию $U(x) = O\left(x_p^{1-k}\right)$ при $x_p \to 0$.

2°. Существуют решения $U(x)$ уравнения (1) в области $D_e = E_p^+ \setminus \bar{D}$, удовлетворяющие условию $U(x) = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{k}{2}\right)}\right)$ при $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_p^2} \to \infty$, где $\rho_0^2 = \sum_{i=1}^{p} x_i^2$.

3°. Принцип максимума, вытекающий из интегрального представления (15), сформулируем в виде теоремы:

Теорема 1 (принцип максимума). *Если $U(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (14), то функция $U(x)$ достигает своего положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значений на границе Γ, если она тождественно не равна нулю.*

Следствие. Если функция $U(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (14), то $|U(x)| \le \max_{x_0 \in \Gamma} |U(x_0)|$, $x \in D$. В частности, если $U(x)|_\Gamma = 0$, то $U(x) \equiv 0$ в $\bar{D}$.

4. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана. Теоремы единственности

Внутренняя задача Дирихле (Задача D_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}), \tag{16}$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D, \tag{17}$$

$$U(x) = O\left(x_p^{1-k}\right) \text{ при } x_p \to 0, \tag{18}$$

$$U|_\Gamma = f(x), \quad f(x) \in C(\Gamma). \tag{19}$$

Теорема 2. *Внутренняя краевая задача Дирихле (16)-(19) не может иметь более одного решения.*

Внешняя задача Дирихле (Задача D_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C(D_e), \tag{20}$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D_e, \tag{21}$$

$$U(x) = O\left(x_p^{1-k}\right) \text{ при } x_p \to 0, \tag{22}$$

$$U(x) = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{k}{2}\right)}\right) \text{ при } r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2} \to \infty, \tag{23}$$

$$U|_\Gamma = f(x), f(x) \in C(\Gamma). \tag{24}$$

Теорема 3. *Внешняя краевая задача Дирихле (20)-(24) не может иметь более одного решения.*

Внутренняя задача Неймана (Задача N_i). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}), \tag{25}$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D, \tag{26}$$

$$U(x) = O\left(x_p^{1-k}\right) \text{ при } x_p \to 0, \tag{27}$$

$$\left.\frac{\partial U(x)}{\partial n}\right|_\Gamma = \varphi(x), \quad f(x) \in C(\Gamma). \tag{28}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ – внешняя нормаль.

Теорема 4. *Внутренняя краевая задача Неймана (25)-(28) не может иметь более одного решения.*

Внешняя задача Неймана (Задача N_e). Требуется найти функцию $U(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$U(x) \in C^2(D_e) \cap C^1(D_e), \tag{29}$$

$$E[U(x)] = 0, \quad x \in D_e, \tag{30}$$

$$U(x) = O\left(x_p^{1-k}\right) \text{ при } x_p \to 0, \tag{31}$$

$$U(x) = O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{k}{2}\right)}\right) \text{ при } r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2} \to \infty, \tag{32}$$

$$\left.\frac{\partial U(x)}{\partial n}\right|_\Gamma = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C(\Gamma). \tag{33}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ – нормаль, направленная во вне области $\bar{D}$.

Теорема 5. *Внешняя краевая задача Неймана (29)-(33) не может иметь более одного решения.*

5. Потенциалы простого и двойного слоев и их свойства

С помощью фундаментального решения $E(\xi, x)$ уравнения (1) образуем поверхностный потенциал двойного слоя: $W(x) = \int_\Gamma \nu(\xi) \frac{\partial E(\xi, x)}{\partial n} \xi_p^k d\Gamma$, где $\nu(\xi)$ – непрерывная функция на Γ.

Очевидно, что потенциал $W(x)$ есть регулярное решение уравнения (1) в любой области, лежащей в полупространстве E_p^+, не имеющей общих точек ни с гиперповерхностью Γ, ни с гиперплоскостью $x_p = 0$. В силу (9)

$$W(x) = O\left(x_p^{1-k}\right) \text{ при } x_p \to 0.$$

Лемма 1. Если Γ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то $\int_\Gamma \left|\frac{\partial E(\xi, x)}{\partial n}\right| \xi_p^k d\Gamma \le B$, где B – постоянная.

Лемма 2 (Геллерстедт). Если Γ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол, то

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial E(\xi,x)}{\partial n}\xi_p^k\,d\Gamma=\begin{cases}-\int_{\Gamma_0}\frac{\partial E(\xi',x)}{\partial \xi_p}\xi_p^k d\xi'-1, \text{если } x\in D;\\ -\int_{\Gamma_0}\frac{\partial E(\xi',x)}{\partial \xi_p}\xi_p^k d\xi'-\frac{1}{2}, \text{если } x\in \Gamma;\\ -\int_{\Gamma_0}\frac{\partial E(\xi',x)}{\partial \xi_p}\xi_p^k d\xi', \text{если } x\in E_p^+\setminus\overline{D}=D_e.\end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть* Γ *– поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p=0$ *прямой угол. Тогда при* $\nu\in C(\Gamma)$ *имеют место следующие предельные соотношения:* $W_i(x_0)=-\frac{\nu_0}{2}+\widetilde{W(x_0)}$, $W_e(x_0)=\frac{\nu_0}{2}+\widetilde{W(x_0)}$, *где* $W_i(x_0)$ *и* $W_e(x_0)$ *означают предельные значения потенциала двойного слоя* $W(x)$ *в точке* $x_0\in\Gamma$ *при* $x\to x_0$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, *а* $\widetilde{W(x_0)}$ *– прямое значение потенциала двойного слоя* $W(x)$ *в точке* $x_0\in\Gamma$. *Здесь* $x_0\in\Gamma$ *– фиксированная точка границы* Γ, $\nu_0=\nu(x_0)$.

Доказательство теоремы 6 следует из лемм 1 и 2.

С помощью фундаментального решения $E(\xi,x)$ уравнения (1) образуем поверхностный потенциал простого слоя:

$$V(x)=\int_{\Gamma}\mu(\xi)E(\xi,x)\xi_p^k d\Gamma, \qquad (34)$$

где $\mu(\xi)$ – непрерывная функция на Γ.

Очевидно, что потенциал $V(x)$ – регулярное решение уравнения (1) в любой области, лежащей в E_p^+, не имеющей общих точек ни с гиперповерхностью Γ, ни с гиперплоскостью $x_p=0$.

Из формул (8) и (10) следует, что потенциал $V(x)$ обладает следующими свойствами: $V(x)=O\left(x_p^{1-k}\right)$ при $x_p\to 0$, $V(x)=O\left(\left(\rho_0^2\right)^{-\left(\frac{p-2}{2}+\frac{k}{2}\right)}\right)$ при $r=\sqrt{x_1^2+...+x_p^2}\to\infty$.

Из представления (7) следует, что фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точке x_0 имеет степенную особенность вида ρ^{2-p}, т. е. такую же особенность, что фундаментальное решение уравнения Лапласа. Поэтому потенциал (34) на границе Γ ведет себя также, как и гармонический потенциал простого слоя [16: 262], т.е. имеют место следующие теоремы:

Теорема 7. *Пусть* Γ *– поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p=0$ *прямой угол. Тогда если плотность* $\mu\in C(\Gamma)$, *то потенциал простого слоя* $V(x)$ *непрерывен в* E_p^+.

Теорема 8. Пусть Γ – поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p=0$ прямой угол. Тогда при $\mu\in C(\Gamma)$ имеют место следующие предельные соотношения: $\frac{\partial V(x_0)_i}{\partial n_{x_0}}=\frac{\mu_0}{2}+\widetilde{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}}$, $\frac{\partial V(x_0)_e}{\partial n_{x_0}}=-\frac{\mu_0}{2}+\widetilde{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}}$, *где* $\frac{\partial V(x_0)_i}{\partial n_{x_0}}$ *и* $\frac{\partial V(x_0)_e}{\partial n_{x_0}}$ *– предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя в точке* $x_0\in\Gamma$ *соответственно изнутри и извне границы* Γ, $\mu_0=\mu(x_0)$, *а* $\widetilde{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_{x_0}}}$ *– прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя.*

6. Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям теории потенциала

Решение задачи D_i будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$U(x)=W(x)=\int_{\Gamma}\nu(\xi)\frac{\partial E(\xi,x)}{\partial n}\xi_p^k\,d\Gamma. \qquad (35)$$

Очевидно, что функция $U(x)$ удовлетворяет условиям (16)-(18) внутренней задачи Дирихле. Плотность $\nu(\xi)$ – пока неопределенная функция. Ее найдем из требования, чтобы функция (35) удовлетворяла граничному условию (19) задачи D_i.

С этой целью подставим $U(x)$ в граничное условие (19) и, учитывая формулу предельного значения потенциала двойного слоя (теорема 6), получим

$$\nu(x)-2\int_{\Gamma}\nu(\xi)\frac{\partial E(\xi,x)}{\partial n}\xi_p^k\,d\Gamma=-2f(x). \qquad (36)$$

Интегральное уравнение (36) соответствует внутренней задаче Дирихле.

Аналогично вводятся интегральные уравнения, соответствующие задачам D_e, N_i и N_e. Они имеют вид

$$\nu(x)+2\int_{\Gamma}\nu(\xi)\frac{\partial E(\xi,x)}{\partial n}\xi_p^k\,d\Gamma=2f(x), \qquad (37)$$

$$\mu(x)+2\int_{\Gamma}\mu(\xi)\frac{\partial E(\xi,x)}{\partial n_x}\xi_p^k\,d\Gamma=2\varphi(x), \qquad (38)$$

$$\mu(x)-2\int_{\Gamma}\mu(\xi)\frac{\partial E(\xi,x)}{\partial n_x}\xi_p^k\,d\Gamma=-2\varphi(x). \qquad (39)$$

Отметим следующие свойства интегральных уравнений (36)-(39):

1) Из формулы (7) следует, что эти уравнения являются интегральными уравнениями со слабой особенностью.

2) Ядра $\frac{\partial E(\xi, x)}{\partial n}$ и $-\frac{\partial E(\xi, x)}{\partial n_x}$ получаются друг из друга перестановкой точек ξ и x. Так как эти ядра вещественные, то они сопряженные. Отсюда следует, что уравнения (36) и (39), (37) и (38) – попарно сопряженные интегральные уравнения.

Теорема 9. *Если* Γ *– поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* D_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 10. *Если* Γ *– поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* N_e *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

Теорема 11. *Если* Γ *– поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* D_e *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.*

Теорема 12. *Если* Γ *– поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью* $x_p = 0$ *прямой угол, то задача* N_i *для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.*

* * * * * * * * * *

1. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.
2. *Мухлисов Ф.Г.* Потенциалы, порожденные оператором обобщенного сдвига, и краевые задачи для одного класса сингулярных эллиптических уравнений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Казань, 1993. – 324 с.
3. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа / Пер. с ит. Ф.И.Франкля. – М.: ОГИЗ, 1947. – 192 с.
4. *Hellmgren E.* Sur un problème aux limates pour l’équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv Mat., Astr., och Fysik, 1926. – 19B, 14.
5. *Gellerstedt S.* Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second orde de tipe mixte // Thèse, Uppsala, 1935.
6. *Gellerstedt S.* Sur un problème aus limites pour l’équation $y^{2s} z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv Mat., Ast.och Fysik, 1953. – 25A, 10.
7. *Франкль Ф.И.* К теории уравнения $yz_{xx} + z_{yy} = 0$. // Изв. АН СССР. Сер. "Матеем". – 1946. – Т.10. – Вып.2. – С.135-166.
8. *Germain P., Bader R.* Sur quelques problèms relatifs a l’équation du type mixte de Tricomi. // Publ. ONERA. – 1952. – 56.
9. *Germain P., Bader R.* Problèmes elliptiques et hyperboliques singuliers pour une équation du type mixte. // Publ. ONERA. – 1953. – 60.
10. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
11. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981.– 448 с.
12. *Бабенко К. И.* К теории уравнений смешанного типа: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – М.: Мат. ин-т АН СССР, 1952.
13. *Векуа И.Н.* Об одном обобщении интеграла Пуассона для полуплоскости // ДАН СССР. – 1947. – Т.56. – С.229-231.
14. *Смирнов М.М.* Курс высшей математики. – М., 1957. – Т.3. – Ч.2.
15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – СПб.-М.-Краснодар: "Лань". – 2003. – 832 с.
16. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М. 1977. – 432 с.

INVESTIGATION BY THE METHOD OF POTENTIALS OF BASIC BOUNDARY PROBLEMS FOR ONE MULTIDIMENSIONAL SINGULAR ELLIPTIC EQUATION

A.M.Nigmedzianova

In this article the existence and uniqueness of the solution of basic boundary problems for one multidimensional singular elliptic equation is proved by the method of potentials.

Key words: main boundary volume problem, multidimensional singular elliptic equation, method of potentials.

* * * * * * * * * *

Нигмедзянова Айгуль Махмутовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и математического моделирования Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: aigmani@rambler.ru