

ДВИЖЕНИЕ ПУЗЫРЬКА ГАЗА В ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ИСКАЖЕНИЯ ЕГО СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

© М.А.Ильгамов, Л.А.Косолапова, В.Г.Малахов

В статье построена математическая модель динамики пузырька газа в жидкости с учетом искажения его сферической формы и перемещения в пространстве. Предполагается, что искажения формы пузырька и скорость его пространственного движения малы. Соотношения получены с точностью до членов второго порядка относительно малых величин. Приближенно учтены вязкость и сжимаемость жидкости. Приведен ряд примеров, иллюстрирующих влияние свойств жидкости на динамику воздушного пузырька в воде.

Ключевые слова: газовый пузырек, нелинейные колебания, потенциальное течение, численное моделирование.

1. Введение

Рассматривается нелинейная динамика газового пузырька в жидкости с учетом искажений формы его поверхности и пространственного перемещения. Как следует из обзоров, посвященных этой проблеме [1; 2], в большинстве работ жидкость считается идеальной и несжимаемой, а искажения формы и скорость движения пузырька малыми. Так, в работе А.А.Дойников [1] получены уравнения квадратичной модели, а в исследовании S.J.Show [2] – уравнения модели третьего порядка относительно малых величин. При этом в последней работе жидкость считается идеальной и несжимаемой, а в построениях А.А.Дойников вязкость учтена только в уравнениях для сферических колебаний и поступательного движения пузырька. Вязкость при поступательном движении в исследовании А.А.Дойников учтена согласно вычислениям В.В.Левича.

В настоящей работе, являющейся развитием выводов, изложенных в статье А.А.Аганина, М.А.Ильгамова, Л.А.Косолаповой, В.Г.Малахова [4], построена квадратичная относительно искажений сферической формы пузырька и скорости его пространственного перемещения математическая модель динамики пузырька газа в жидкости с учетом движения жидкости и приближенном учете ее вязкости и сжимаемости.

2. Постановка задачи

Изучается осесимметричная динамика газового пузырька в неограниченном объеме жидкости. Движение жидкости предполагается потенциальным. Вязкость учитывается через динамическое граничное условие на поверхности пузырька. Жидкость в ближней к пузырьку области $r \leq r_e$ (ближнее поле) считается несжимаемой. Тогда движение жидкости описывается уравнениями

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p}{\rho_0} = G(t), \quad (1)$$

где t – время, p – давление в жидкости, ρ_0 – плотность жидкости, Φ – потенциал скорости, $G(t)$ – произвольная функция времени. Наряду с неподвижной цилиндрической системой координат x, z, φ вводится подвижная сферическая система координат r, θ, φ с началом в центре пузырька, связанная в осесимметричном случае с неподвижной системой уравнениями

$$x = r \sin \theta, \quad z = z_c(t) + r \cos \theta,$$

где z_c – координата центра пузырька в неподвижной системе отсчета в момент времени t .

В подвижной системе координат второе уравнение (1) запишется в виде

$$\Phi_t - \dot{z}_c(\Phi_r \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r}\Phi_\theta) + \frac{1}{2}(\Phi_r^2 + \frac{1}{r^2}\Phi_\theta^2) + \frac{p}{\rho_0} = G(t), \quad (2)$$

где \dot{z}_c – скорость движения начала координат подвижной системы.

Считается, что газ в пузырьке идеальный, с однородным давлением, изменяющимся по закону

$$p^- = p_b^0 \left(\frac{V_0 - bV_0}{V - bV_0} \right)^\gamma, \quad (3)$$

p_b^0 – начальное давление газа в пузырьке, V_0, V – начальный и текущий объемы пузырька, b – постоянная, γ – показатель адиабаты.

Предполагается, что на бесконечном удалении от пузырька жидкость движется со скоростью \mathbf{u}_∞ , определяемой выражением

$$\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_l(t) = u_l(t)\mathbf{e}_z, \quad (4)$$

где \mathbf{e}_z – направляющий вектор оси z , а давление жидкости p_∞ на уровне $z=0$ изменяется по закону

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t, \quad (5)$$

где p_0 – статическое давление в жидкости; Δp , ω – амплитуда и частота колебаний.

На поверхности пузырька $r = r_s(\theta, t)$ в подвижной сферической системе координат ставится кинематическое условие в виде

$$F_t + (\Phi_r - \dot{z}_c \cos \theta) F_r + \left(\frac{1}{r} \Phi_\theta + \dot{z}_c \sin \theta \right) \frac{1}{r} F_\theta = 0 \quad (6)$$

и динамическое граничное условие в виде

$$p^+ = p^- - 2\sigma H + \tau_{nn}, \quad (7)$$

где σ – поверхностное натяжение, H – средняя кривизна поверхности, τ_{nn} – вязкие напряжения, $\tau_{nn} = 2\mu \partial^2 \Phi / \partial n^2$, μ – динамический коэффициент вязкости. Условие (7) представляет собой равенства нулю суммы проекций сил на нормаль \mathbf{n} к деформированной поверхности пузырька. Предположение о потенциальности течения жидкости исключает возможность использования динамического граничного условия по касательной, поскольку система становится переопределенной. Поэтому в настоящей работе требуется выполнение только условия (7). Сравнение моделей с различными способами учета вязкости показывает возможность такого подхода [5].

3. Метод решения

Уравнение поверхности пузырька в сферической системе координат запишем в виде ряда по сферическим гармоникам

$$r_s(\theta, t) = R(t) \left[1 + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i(t) P_i(\eta) \right]. \quad (8)$$

Здесь P_i – полином Лежандра степени i , $\eta = \cos \theta$. Параметр R будем называть радиусом пузырька, ε_i – искажением сферической формы по гармонике с номером i .

Потенциал скорости Φ берется в виде

$$\Phi(\theta, r, t) = \frac{B_0}{r} + \left(u_l r + \frac{B_1}{r^2} \right) P_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{B_i}{r^{i+1}} P_i(\cos \theta). \quad (9)$$

Дальнейшие соотношения получены в предположении малости искажений сферической формы ε_i , скорости движения пузырька \dot{z}_c и несферических составляющих потенциала скорости жидкости. При этом в уравнениях сохранились члены второго порядка относительно малых величин.

Строгий учет сжимаемости является довольно сложной задачей. Поэтому в настоящей работе используется методика, которая предполагает, что несферические возмущения пузырька оказывают заметное влияние на движение жидкости лишь в некоторой области $r \leq r_e$ (ближнее поле), в которой жидкость считается несжимаемой [6]. При $r \geq r_e$ (дальнее поле) сжимаемость учитывается в рамках одномерной линейной акустики. Из условия сопряжения решений на границе ближнего и дальнего полей $r = r_e$ получаем выражение для функции $G(t)$ в виде

$$G(t) = \frac{p_\infty}{\rho_0} + \frac{1}{2} u_l^2 - \dot{z}_c u_l + \frac{1}{c_f} \ddot{B}_0. \quad (10)$$

При учете сжимаемости принималось дополнительное предположение

$$|\dot{R}/c_f| \sim \varepsilon. \quad (11)$$

Подставим разложения (8), (9) в условия (6), (7) с учетом (2), (10). Применяя при интегрировании полученной системы по координате θ процедуру метода Бубнова-Галеркина, приходим к системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных

$$R, \varepsilon_i, B_0, \delta_1, \delta_i, z_c, \quad i = 2, 3, \dots \quad \text{где } \delta_i = \frac{B_i}{R^i}, i = \overline{1, \infty}.$$

Исключив из нее неизвестные B_0, δ_1, δ_i , запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиуса $R(t)$, искажений $\varepsilon_i(t)$ и координаты центра пузырька $z_c(t)$ в виде

$$\left[1 + \frac{\tilde{\alpha}_{ii}}{2} \varepsilon_i^2 - \frac{1}{c_f} \left(\dot{R} + \tilde{\alpha}_{ii} R \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i - \frac{4\mu}{\rho_0 R} \left(1 + \frac{3}{2} \tilde{\alpha}_{ii} \varepsilon_i^2 \right) \right) \right] R \ddot{R} + \frac{\tilde{\alpha}_{ii}}{2} \left(1 + \frac{8\mu}{\rho_0 c_f R} \right) R^2 \varepsilon_i \ddot{\varepsilon}_i - \frac{R}{2c_f} w \dot{w} = \\ = - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c_f} \right) \dot{R}^2 - \tilde{\alpha}_{ii} \left(3\dot{R}^2 \varepsilon_i^2 + 4R \dot{R} \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i + R^2 \dot{\varepsilon}_i^2 \right) + \frac{(2i+1)}{4(i+1)} \tilde{\alpha}_{ii} \left(9\dot{R}^2 \varepsilon_i^2 + 6R \dot{R} \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i + R^2 \dot{\varepsilon}_i^2 \right) + \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\rho_0} \left\{ \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_f} \right) (p^- - p_\infty) + \frac{R}{c_f} (\dot{p}^- - \dot{p}_\infty) - \frac{\sigma}{R} \left[2 + (1-i-i^2) \tilde{\alpha}_{ii} \varepsilon_i^2 \right] \right\} - \frac{\mu}{\rho_0 R} \left[4\dot{R} - \tilde{\alpha}_{ii} (6i\dot{R}\varepsilon_i + \right. \\
 & \quad \left. + (i+1)(i-2)R\dot{\varepsilon}_i) \varepsilon_i + \frac{4\tilde{\alpha}_{ii}}{c_f} R^2 \dot{\varepsilon}_i^2 \right] + \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_f} \right) \frac{w^2}{4}, \\
 & \left(\frac{7}{2} \tilde{\alpha}_{ij1} - 3\tilde{\gamma}_{ij1} \right) R\dot{R}\varepsilon_i\varepsilon_j + (\tilde{\alpha}_{ij1} - \tilde{\gamma}_{ij1}) R^2 \ddot{\varepsilon}_i\varepsilon_j - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{7}{5} \varepsilon_2 \right) R\dot{w} = -\frac{2}{3} R \left(1 + \frac{2}{5} \varepsilon_2 \right) \dot{u}_l + 3\dot{R}^2 \varepsilon_i\varepsilon_j (\tilde{\gamma}_{ij1} - \tilde{\alpha}_{ij1} - \\
 & \quad - \frac{3\tilde{\beta}_{ij1}}{2(i+1)(j+1)}) - \frac{R^2}{2} \left(\tilde{\alpha}_{ij1} + \frac{\tilde{\beta}_{ij1}}{(i+1)(j+1)} - 2\tilde{\gamma}_{ij1} \right) \dot{\varepsilon}_i\dot{\varepsilon}_j + R\dot{R} \left[(5\dot{\varepsilon}_i\varepsilon_j + 3\varepsilon_i\dot{\varepsilon}_j) \tilde{\gamma}_{ij1} - \dot{\varepsilon}_i\varepsilon_j (8\tilde{\alpha}_{ij1} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3\tilde{\beta}_{ij1}}{(i+1)(j+1)}) \right] + \frac{2}{\rho_0 R} \left\{ \sigma (1-i-i^2) \tilde{\alpha}_{ij1} \varepsilon_i\varepsilon_j - 3\mu \left[(3(\tilde{\alpha}_{ij1} - 2\tilde{\gamma}_{ij1})\dot{R}\varepsilon_i - 2\tilde{\gamma}_{ij1}R\dot{\varepsilon}_i) \varepsilon_j - (4\tilde{\alpha}_{ij1} - \tilde{\beta}_{ij1}) \dot{R}\varepsilon_i\varepsilon_j + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{i+2}{i+1} (2\tilde{\beta}_{ij1} - (i+1)(i+3)\tilde{\alpha}_{ij1}) (3R\dot{\varepsilon}_i + R\dot{\varepsilon}_i) \varepsilon_j \right] \right\} + \left(\dot{R} - \frac{7}{5} R\dot{\varepsilon}_2 - \frac{3}{5} R\dot{\varepsilon}_2 \right) w + \frac{4\mu}{\rho_0 R} (1-\varepsilon_2) w, \\
 & \left[\frac{k-2}{k+1} \tilde{\alpha}_{kk} \varepsilon_k + \left(\frac{2k+5}{k+1} \tilde{\alpha}_{ijk} - 3\tilde{\gamma}_{ijk} \right) \varepsilon_i\varepsilon_j \right] R\ddot{R} - R^2 \left[\frac{\tilde{\alpha}_{kk}}{k+1} \ddot{\varepsilon}_k - (\tilde{\alpha}_{ijk} - \tilde{\gamma}_{ijk}) \varepsilon_j \ddot{\varepsilon}_i \right] + R \left(\tilde{\alpha}_{ik1} - \frac{3\tilde{\delta}_{lik}}{2(k+1)} \right) \varepsilon_i \dot{w} = \\
 & \quad = -\tilde{\alpha}_{ik1} \dot{u}_l R \varepsilon_i + \frac{\tilde{\alpha}_{kk}}{k+1} \dot{R} (3R\dot{\varepsilon}_k + 5R\dot{\varepsilon}_k) + 3\dot{R}^2 \left(\tilde{\gamma}_{ijk} - \frac{k+3}{2(k+1)} \tilde{\alpha}_{ijk} - \frac{3\tilde{\beta}_{ijk}}{2(i+1)(j+1)} \right) \varepsilon_i\varepsilon_j - \frac{R^2}{2} \times \\
 & \quad \times \left(\tilde{\alpha}_{ijk} + \frac{\tilde{\beta}_{ijk}}{(i+1)(j+1)} - 2\tilde{\gamma}_{ijk} \right) \dot{\varepsilon}_i\dot{\varepsilon}_j + R\dot{R} \left[(3\varepsilon_i\dot{\varepsilon}_j + 5\dot{\varepsilon}_i\varepsilon_j) \tilde{\gamma}_{ijk} - \left(\frac{5k+11}{k+1} \tilde{\alpha}_{ijk} + \frac{3\tilde{\beta}_{ijk}}{(i+1)(j+1)} \right) \dot{\varepsilon}_i\varepsilon_j \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{\rho_0 R} \left\{ \sigma \left[(k-1)(k+2) \tilde{\alpha}_{kk} \varepsilon_k + 2\tilde{\alpha}_{ijk} (1-i-i^2) \varepsilon_i\varepsilon_j \right] - 2\mu \left[-\tilde{\alpha}_{kk} (3kR\dot{\varepsilon}_k + (k+2)R\dot{\varepsilon}_k) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 3(\tilde{\beta}_{ijk} - 4\tilde{\alpha}_{ijk}) \dot{R}\varepsilon_i\varepsilon_j - \frac{i+2}{i+1} (2\tilde{\beta}_{ijk} - (i+1)(i+3)\tilde{\alpha}_{ijk}) (3R\dot{\varepsilon}_i + R\dot{\varepsilon}_i) \varepsilon_j + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (k+2) \left[3\dot{R}(\tilde{\alpha}_{ijk} - (k+1)\tilde{\gamma}_{ijk}) \varepsilon_i\varepsilon_j - (k+1)\tilde{\gamma}_{ijk} R\dot{\varepsilon}_i\varepsilon_j \right] \right\} + \\
 & \quad + \left(\tilde{\alpha}_{11k} - \frac{5}{4} \tilde{\beta}_{11k} \right) \frac{w^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\tilde{\delta}_{lik}}{(k+1)} (R\dot{\varepsilon}_i + R\dot{\varepsilon}_i) w - \frac{3}{2(i+1)} \tilde{\beta}_{lik} w (3R\dot{\varepsilon}_i + R\dot{\varepsilon}_i) - \frac{2\mu}{\rho_0 R} \left[3(\tilde{\beta}_{i1k} - 4\tilde{\alpha}_{ik1}) \right. \\
 & \quad \left. \left(-1 + \frac{3}{5} \varepsilon_2 \right) w \varepsilon_i - \frac{3(k+2)}{2} \tilde{\delta}_{lik} w \varepsilon_i \right], \quad k = 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

В (12)-(14) обозначено

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_{ik} &= \int_{-1}^1 P_i(\eta) P_k(\eta) d\eta = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ \frac{2}{2i+1}, & i = k \end{cases}, \\
 \tilde{\alpha}_{ijk} &= \int_{-1}^1 P_i P_j P_k d\eta, \quad \tilde{\beta}_{ijk} = \int_{-1}^1 P_i' P_j' P_k (1-\eta^2) d\eta, \\
 P_i' &= \frac{dP_i(\eta)}{d\eta}, \quad \tilde{\delta}_{ijk} = 2\tilde{\alpha}_{ijk} - \tilde{\beta}_{ijk}, \\
 \tilde{\gamma}_{ijk} &= \frac{(i+1)(i+2)\tilde{\alpha}_{ijk} - \tilde{\beta}_{ijk}}{(i+1)(k+1)}, \quad w = \dot{z}_c - u_l.
 \end{aligned}$$

Выражение для текущего объема пузырька с принятой точностью имеет вид

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon_i^2 \tilde{\alpha}_{ii} \right). \tag{15}$$

В (12)-(15) для сокращения записи принято соглашение о суммировании: если слагаемое содержит два одинаковых индекса, то по ним предполагается суммирование.

Отметим, что соотношения работы [1] получаются как частный случай (12)-(14) при исключении квадратичных слагаемых вида $\sigma \varepsilon_i \varepsilon_j$ и слагаемых, учитывающих сжимаемость и вязкость жидкости, кроме членов $4\mu\dot{R}/\rho_0 R$ и $4\mu w/\rho_0 R$ в уравнениях (12), (13).

Система (12)-(14) с начальными условиями

$$R(0) = R_0, \dot{R}(0) = 0, \varepsilon_i(0) = \varepsilon_i^0,$$

$$\dot{\varepsilon}_i(0) = 0, z(0) = z_{c0}, w(0) = w_0$$

решается методом Дормана-Принса седьмого порядка точности [7]. При вычислениях в представлении (8), (9) бесконечные верхние пределы сумм заменяются на число M , тогда система уравнений содержит $2M+2$ неизвестные функции.

4. Результаты решения задач

4.1. Для проверки полученных соотношений была решена задача о движении несферического пузырька воздуха в воде при постоянном "на бесконечности" давлении в жидкости. В качестве возмущения в момент времени $t = 0$ задается ма-

лое искажение формы по третьей гармонике. Давление внутри пузырька изменяется по закону (3). Результаты получены при следующих исходных данных:

$$R_0 = 50 \text{ мкм}, \gamma = 1,4, b = 0, c_f = 1500 \text{ м/с},$$

$$\rho_f = 998 \text{ кг/м}^3, \sigma = 0,0725 \text{ кг/с}^2, \mu = 10^{-3} \text{ кг/мс},$$

$$p_\infty = 0,1 \text{ МПа}, w_0 = 0, \varepsilon_3^0 = 0,1, M = 4.$$

Решение данной задачи приведено в [1]. На рис.1 тонкими сплошными линиями изображено решение, полученное с использованием соотношений [1].

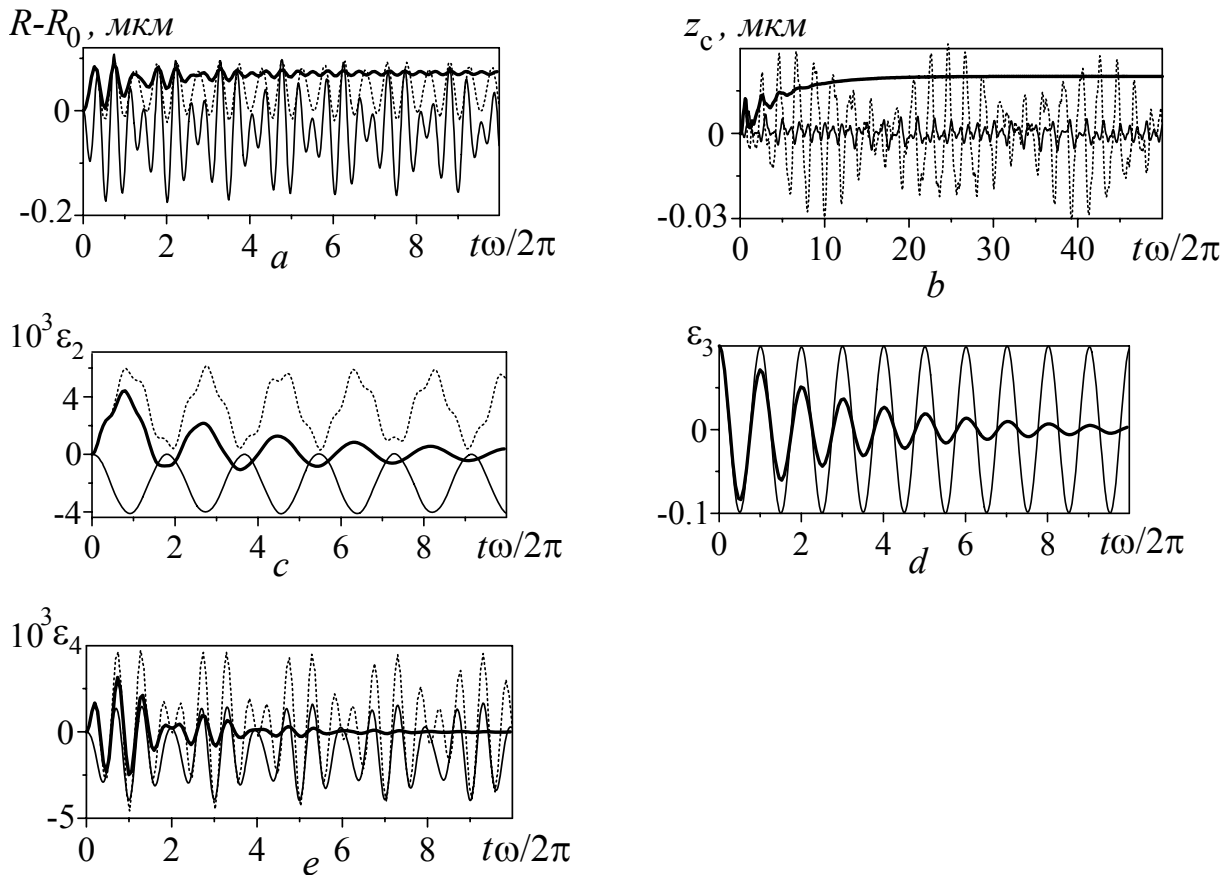


Рис.1. Зависимости от времени величин $R - R_0$ (a), z_c (b), ε_2 (c), ε_3 (d), ε_4 (e). Пунктирные линии – $1/c_f = 0, \mu = 0$, толстые линии – $1/c_f \neq 0, \mu \neq 0$ (настоящая работа), тонкие линии – по уравнениям [1]

Толстыми сплошными и пунктирными линиями приведены результаты настоящей работы: пунктирные – решение для идеальной несжимаемой жидкости, толстые линии – с учетом свойств жидкости. Видно, что характер решений качественно меняется в зависимости от используемых соотношений. Поскольку в данной задаче возмущение радиуса $R - R_0$ и искажения сферической формы пузырька ε_i с $i \neq 3$ малы (они воз-

никают в результате проявления нелинейного взаимодействия), разница в решении обусловлена, в основном, способом приближенного учета вязкости жидкости. При использовании соотношений настоящей работы с течением времени скорость пузырька обращается в нуль, а амплитуды всех гармоник затухают. Отметим, что решения [1] и настоящей работы для идеальной несжимаемой жидкости (тонкие сплошные и пунктирные линии) также качественно различны. Та-

ким образом, учет в силах поверхностного натяжения слагаемых второго порядка малости оказывает существенное влияние на решение данной задачи.

4.2. Движение в воде пустой несферической полости с заданной начальной скоростью. Давление в жидкости "на бесконечности" постоянное. Бралась следующие исходные данные:

$$R_0 = 50 \text{ мкм}, c_f = 1500 \text{ м/с}, \rho_f = 998 \text{ кг/м}^3,$$

$$\sigma = 0,0725 \text{ кг/с}^2, \mu = 10^{-3} \text{ кг/мс}, p_\infty = 0,1 \text{ МПа},$$

$$p_b^0 = 0, w_0 = 0,1 \text{ м/с}, \varepsilon_2^0 = 0.$$

Искажение сферической формы пузырька допускалось в виде второй сферической гармоники. В начальный момент времени в сферической полости при заданной начальной скорости в процессе движения возникает искажение ε_2 , обусловленное нелинейным взаимодействием между скоростью пространственного перемещения пузырька и искажением по второй сферической гармонике. На рис.2. приведены зависимости от времени отношения R/R_0 , искажения ε_2 , координаты центра пузырька z_c и скорости ее изменения для 4 вариантов (номер кривых соответствует номеру варианта): 1 – идеальная несжимаемая

жидкость без учета поверхностного натяжения, 2 – с учетом поверхностного натяжения, 3 – с учетом вязкости и сжимаемости и 4 – с учетом поверхностного натяжения, вязкости и сжимаемости жидкости. Во всех вариантах на достаточно коротком интервале времени наблюдается резкий рост искажения ε_2 . Следует отметить, что приведенные результаты можно получить, используя упрощенные уравнения, когда в соотношениях пренебрегается слагаемыми порядка $O(\varepsilon^2)$, за исключением нескольких членов вида $w\varepsilon_2, w\dot{\varepsilon}_2$, которые обеспечивают взаимодействие между искажением формы и пространственным перемещением. Видно, что учет свойств жидкости влияет на время разрушения пузырька t^* ($|\varepsilon_2| \sim 1$). В основном, время t^* сокращается за счет влияния поверхностного натяжения (линия 2 по сравнению с линией 1), а учет вязкости и сжимаемости приводит к его увеличению (линия 3 по сравнению с линией 2). На рис.2b штриховой линией приведена форма полости в момент $t=0$ и сплошной линией для варианта 4 в момент $t = 4,527 \text{ мкс}$, когда наблюдается заметное искажение сферической формы.

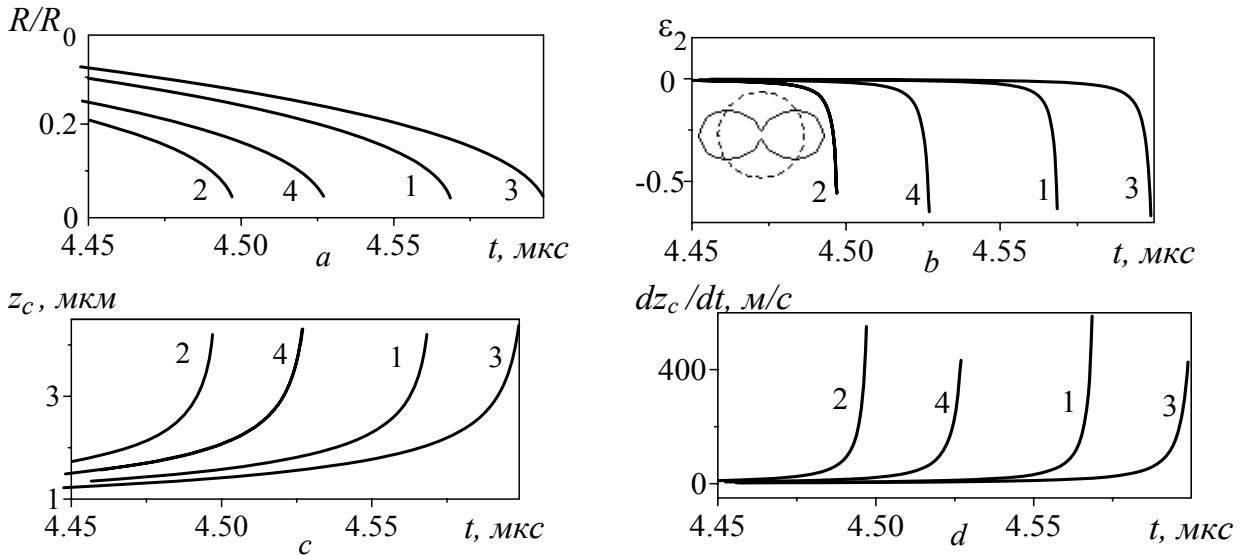


Рис.2. Зависимости от времени отношения R/R_0 , искажения ε_2 , координаты центра пузырька z_c и его скорости в случае: 1 – $\sigma = 0, \mu = 0, 1/c_f = 0$; 2 – $\sigma \neq 0, \mu = 0, 1/c_f = 0$; 3 – $\sigma = 0, \mu \neq 0, 1/c_f \neq 0$; 4 – $\sigma \neq 0, \mu \neq 0, 1/c_f \neq 0$

4.3. Движение несферического пузырька воздуха в воде под действием периодически изменяющегося давления жидкости (5). Для расчета взяты данные:

$$R_0 = 20 \text{ мкм}, \gamma = 1,4, b = 8,5, c_f = 1500 \text{ м/с},$$

$$\rho_f = 998 \text{ кг/м}^3, \sigma = 0,0725 \text{ кг/с}^2, \mu = 10^{-3} \text{ кг/мс},$$

$$p_0 = 0,1 \text{ МПа}, \Delta p = 0,06 \text{ МПа}, \omega/2\pi = 26,5 \text{ кГц},$$

$$w_0 = 0, \varepsilon_5^0 = 0,3, \varepsilon_i^0 = 0, i \neq 5; M = 10.$$

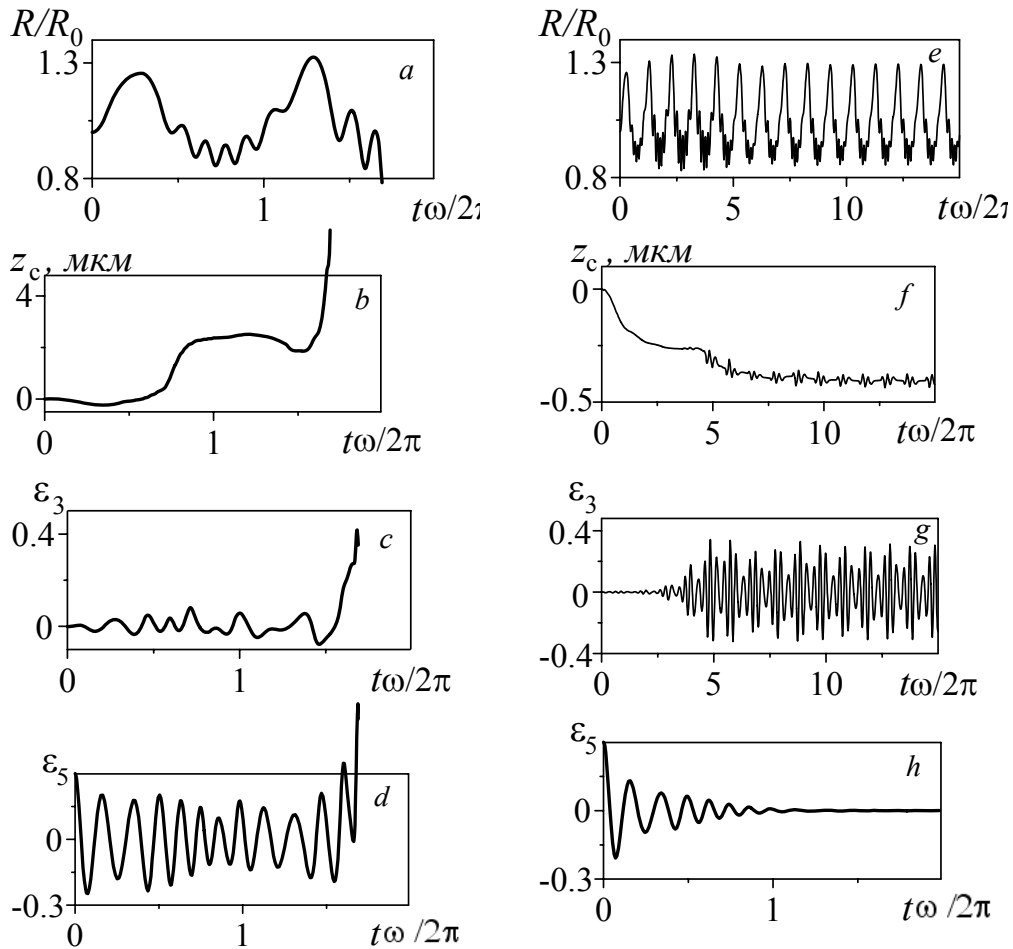


Рис.3. Зависимости от времени отношения R/R_0 , координаты центра пузырька z_c и искажений $\varepsilon_3, \varepsilon_5$: a, b, c, d – идеальная несжимаемая жидкость; e, f, g, h – с учетом свойств жидкости

На рис.3 приведены зависимости от времени отношения R/R_0 , координаты центра пузырька z_c и искажений $\varepsilon_3, \varepsilon_5$ для идеальной несжимаемой жидкости (линии a, b, c, d) и с учетом вязкости и сжимаемости (линии e, f, g, h). Видно, что в идеальной несжимаемой жидкости при $t > 1,5T$, где T – период изменения давления жидкости, наблюдается резкий рост искажений и перемещения пузырька. Расчеты показывают, что учет сжимаемости мало влияет на решение задачи. И лишь учет вязкости приводит к качественным изменениям результатов. При этом радиус пузырька R совершает периодические колебания с периодом T . Заданное в начальный момент времени искажение ε_5 в течение двух периодов убывает до нуля (рис.3*h*), но за это время в результате нелинейного взаимодействия возникают другие гармоники и движение пузырька вдоль оси z . За период времени $\sim 5T$ устанавливаются периодические колебания всех гармоник. Наибольшая амплитуда наблюдается у третьей гармоники (рис.3*g*). Амплитуды других гармо-

ник значительно меньше. Одновременно с развитием искажений начинается и поступательное движение пузырька, которое затем переходит в его колебания относительно оси z .

5. Заключение

Построена математическая модель нелинейной динамики несферического газового пузырька в жидкости с учетом искажения его сферической формы и пространственного перемещения. Движение жидкости считается потенциальным. При этом вязкость жидкости учитывается через динамическое граничное условие на поверхности пузырька. Сжимаемость жидкости учитывается лишь в дальней от пузырька области. Предполагается, что искажения сферической формы пузырька и скорость его движения малы. Соотношения получены с учетом слагаемых второго порядка относительно малых величин. Проведено сравнение полученных результатов с результатами работы [1]. Наблюдается их удовлетворительное совпадение. Решены задачи о движении пустой несферической полости в воде при постоянном "на бесконечности" давлении жидкости и

о колебаниях пузырька воздуха в воде под воздействием периодически изменяющегося давления "на бесконечности". Показано, что при пренебрежении сжимаемостью жидкости, ее вязкостью или поверхностным натяжением могут получиться качественно различные решения.

Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00215).

1. *Doinikov A.A.* Translational motion of a bubble undergoing shape oscillations // *J. Fluid. Mech.* – 2004. – V.501. – P.1-24.
2. *Show S.J.* Translation and oscillation of a bubble under axisymmetric deformation // *Physics of fluids.* – 2006. – 18. – 072104. – 15 p.
3. *Levich B.V.* *Physicochemical Hydrodynamics.* – Prentice-Hall, 1962.

4. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.* Нелинейные несферические колебания пузырька газа при периодическом изменении давления окружающей жидкости // *Теплофизика и аэромеханика.* – 2008. – Т.15. – №3. – С.521-533.
5. *Нигматуллин Р.И., Ахатов И.Ш., Вахитова Н.К.* О сжимаемости жидкости в динамике газового пузырька // *Докл. РАН.* – 1996. – Т.348. – №6. – С.768-771.
6. *Ильгамов М.А., Аганин А.А., Косолапова Л.А. и др.* Модели динамики несферического пузырька с учетом вязкости жидкости // *Тр. мат. центра им. Н.И.Лобачевского. Модели механики сплошной среды. Материалы XVI-ой сессии Междун. школы по моделям механики сплошной среды.* – Казань: Изд-во Казан. мат. об-ва, 2002. – Т.16. – С.192-201.
7. *Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

TRANSLATIONAL MOTION OF A GAS BUBBLE IN A LIQUID WITH ALLOWING FOR DISTORTIONS OF ITS SPHERICAL SHAPE

М.А.Ильгамов, Л.А.Косолапова, В.Г.Малахов

A mathematical model of dynamics of a gas bubble in a liquid with allowing for distortion of its spherical shape and its translational movement has been developed. The distortions of the shape of the bubble and the velocity of its spatial movement are assumed to be small. The resolving equations have been obtained up to the terms of the second order of accuracy in the small values. Viscosity and compressibility of the liquid are taken into account approximately. A number of examples are presented, showing the influence of the liquid properties on the dynamics of a gas bubble in water.

Key words: gas bubble, nonlinear oscillation, potential flow, numerical simulation.

Ильгамов Марат Аксанович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией Института механики Уфимского научного центра РАН, главный научный специалист Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН.

E-mail: lgamov@anrb.ru

Косолапова Людмила Александровна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН.

E-mail: kosolapova@kfti.knc.ru

Малахов Владимир Георгиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН.

E-mail: malahov@kfti.knc.ru