

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕМЕНТЫ РАЗЛИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ

© Р.Г.Мухарлямов, О.В.Матухина, А.А.Ахметов

В статье рассматривается задача управления динамикой системы с элементами различной физической природы. Предлагается метод построения математической модели динамики, обеспечивающей стабилизацию связей. Строится алгоритм численного решения соответствующей системы дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих наложенные на систему связи, ее кинематику и динамику. Предложенные методы решения задачи управления используются для исследования динамики электромеханической системы, движения мобильного робота с обходом препятствий, управления элементом адаптивной оптической системы и планирования производства условного нефтеперерабатывающего предприятия.

**Ключевые слова:** управление динамикой, стабилизация связей, математическое моделирование, численные методы.

### 1. Введение

Известные к настоящему времени динамические аналогии позволяют использовать методы классической механики для решения задачи управления системами, содержащими элементы различной природы, экономическими объектами и производственными системами. Процессы изменения состояния этих систем описываются дифференциально-алгебраическими уравнениями, составленными из кинематических соотношений, целей управления, уравнений связей и уравнений динамики, выраженных в обобщенных координатах или в канонических переменных.

Обычно под решением задачи управления механической системой понимают аналитическое построение управляющих воздействий, обеспечивающих изменение фазовых координат по заданному закону. Такое представление требует определения желаемого закона движения. Однако в ряде случаев для построения требуемого управления не требуется описание закона движения системы по всем координатам. Желаемые свойства движения могут быть выражены уравнениями связей, а управляющие воздействия определены как соответствующие реакции связей. В конечном итоге задача управления динамикой сводится к построению решения системы дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из уравнений динамики и уравнений связей.

### 2. Динамические аналогии

Аналогии между динамикой систем различной физической природы и механических систем позволяют использовать методы классической механики для исследования динамических процессов в системах, содержащих элементы различной физической природы. Аналогии в дина-

мических показателях различных систем [1] позволяют описывать [2] фазовое состояние систем различной физической природы в унифицированных переменных и использовать для исследования динамических процессов методы и модели классической механики.

Так, например, в [3; 4; 5] исследованы задачи динамики и управления механическими процессами в живых организмах. В [6] уравнениями механики

$$\frac{d}{dt} \left( L \frac{dI}{dt} \right) + \left( \tau - \frac{dL}{dt} \right) \frac{dI}{dt} + \frac{I}{G} = M$$

описывается процесс познания, если под величинами  $L, G, \tau$  и  $I$  понимать параметры, характеризующие интеллектуальные свойства субъекта познания, и объем информации.

В работах [7; 8; 9] была установлена аналогия динамических процессов в простейшем экономическом объекте движению точки переменной массы и предложены динамические модели процессов в экономике. Результаты исследований по динамике точки и тела переменной массы [10] были развиты [11] до создания нового направления, связанного с управлением программного движения и обратными задачами динамики. Методы аналитической динамики систем с переменной массой [12] были использованы для исследования задач моделирования и управления динамикой производственных систем [13; 14].

### 3. Динамика экономических объектов

Динамика простого экономического объекта, принимаемого за элемент экономики, описывается [7] теми же уравнениями, что и движение точки переменной массы:

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dY}{dt} \right) + w \left( Y, \frac{dY}{dt}, t \right) = u \left( Y, \frac{dY}{dt}, t \right).$$

Здесь  $Y$  – объем выпускаемой продукции,  $y(t) = \frac{dY}{dt}$  – максимальный объем продукции, которую может выпускать объект в единицу времени при отсутствии ограничений (мощность),  $m(t)$  – мгновенная фондоемкость основных фондов объекта по выпуску данного вида продукции,  $q(t) = m(t)y(t)$  – состояние основных производственных фондов,  $W, u$  – выбывающие и вновь поступившие с момента  $t$  основные фонды.

Изменение мощности производственного предприятия, состоящего из  $N$  подразделений, с течением времени описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_a}{dt} &= v_a, \\ \frac{d}{dt}(m_a v_a) + w_a(x_c, v_b, t) &= \\ &= p_a(x_c, v_b, t) + b_{as}(x_c, v_b, t)u^s, \\ a, b, c &= 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, S, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_a$  – объем выпускаемой продукции,  $v_a$  – мощность,  $m_a$  – мгновенная фондоемкость,  $m_a v_a = q_a$  – состояние основных производственных фондов  $a$ -го подразделения в момент времени  $t$ ,  $w_a, p_a$  – изменение фондов  $a$ -го подразделения, выбывающих из потребления за счет износа и старения оборудования,  $u^1, \dots, u^s$  – управление за счет поступающих основных фондов,  $b_{as}$  – известные коэффициенты.

Требуемые свойства функционирования предприятия задаются уравнениями связей:

$$\begin{aligned} \omega^p(x_a, t) = 0, \quad \omega^r(x_a, v_b, t) = 0, \\ p = 1, \dots, P, \quad r = P + 1, \dots, R. \end{aligned} \quad (2)$$

Если часть уравнений связей (2)  $\omega^h(x_a, t) = 0$ ,  $h = 1, \dots, H$  допускает выражение объемов продукции  $x_1, \dots, x_N$  через произвольные обобщенные координаты  $q^1, \dots, q^n$ :

$$\begin{aligned} f^{\mu-n}(q^i, t) = 0, \quad f^{\rho-n}(q^i, v^j, t) = 0, \\ \mu = n + 1, \dots, n + m, \\ \rho = n + m + 1, \dots, n + m + r, \end{aligned} \quad (3)$$

то систему (1) можно представить в виде уравнений Лагранжа.

#### 4. Уравнения динамики в обобщенных координатах

Решение уравнений динамики ищется в следующей последовательности. Пусть движение механической системы определяется уравнениями связей (4) и уравнениями динамики

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= v_i, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^0}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L^0}{\partial q^i} &= Q_i - \frac{\partial D^0}{\partial v^i} + \lambda_\kappa \phi_i^\kappa, \\ \kappa &= 1, 2, \dots, m + r. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $L^0 = L^0(q^i, v^j, t)$  – лагранжиан системы,  $D^0 = D^0(q^i, v^j, t)$  – диссипативная функция,  $Q_k = Q_k(q^i, v^j, t)$  – непотенциальные обобщенные силы,  $\lambda_\kappa$  – множители Лагранжа,  $\phi_i^{\mu-n} = \frac{\partial f^{\mu-n}}{\partial q^i}$ ,

$\phi_i^{\rho-n} = \frac{\partial f^{\rho-n}}{\partial v^i}$ . В равенствах (4), как и всюду в дальнейшем, предполагается суммирование по одинаковым индексам  $\kappa$ .

Система уравнений (3), (4) составляет систему дифференциально-алгебраических уравнений индекса 3. Обычный путь решения состоит в опеределиении выражения множителей Лагранжа  $\lambda_\kappa$  из равенств

$$\frac{dq^\mu}{dt} = v^\mu, \quad \frac{dv^\mu}{dt} = 0, \quad \frac{dv^\rho}{dt} = 0, \quad (5)$$

где  $q^\mu, v^\mu, v^\rho$  представляют значения функций, задающих уравнения связей:

$$\begin{aligned} q^\mu &= f^{\mu-n}(q^i, t), \\ v^\mu &= \phi_j^{\mu-n}(q^i, t)v^j + f_i^{\mu-n}(q^i, t), \\ f_i^{\mu-n} &= \frac{\partial f^{\mu-n}}{\partial t}, \quad v^\rho = f^{\rho-n}(q^i, v^j, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Из выражений  $q^\mu = c_1^\mu t + c_0^\mu$ ,  $v^\rho = c^\rho$  общего решения уравнений (5), содержащих произвольные постоянные  $c_1^\mu, c_0^\mu, c^\rho$ , следует, что решение  $q^i = q^i(t)$ ,  $v^i = v^i(t)$  системы (4) будет удовлетворять уравнениям связей (3) только в том случае, если начальные условия

$$q^i(t_0) = q_0^i, \quad v^j(t_0) = v_0^j$$

соответствуют уравнениям связей (3):

$$\begin{aligned} f^{\mu-n}(q_0^i, t_0) &= 0, \\ \phi_j^{\mu-n}(q_0^i, t_0)v_0^j + f_i^{\mu-n}(q_0^i, t_0) &= 0, \\ f^{\rho-n}(q_0^i, v_0^j, t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Если же условия (7) не выполняются, то отклонение движения, соответствующего решению системы (4), будет возрастать с течением времени. Тем более не приходится ожидать точного выполнения уравнений связей на решениях системы уравнений (4), определяемых численным интегрированием.

*Пример 1.* Рассмотрим движение тяжелой точки по окружности единичного радиуса. Принимая за  $q^1, q^2$  прямоугольные координаты  $x_1, x_2$  тяжелой точки, легко составить уравнение связи (3) и уравнения динамики (4):

$$(x_1^2 + x_2^2 - 1)/2 = 0, \quad (8)$$

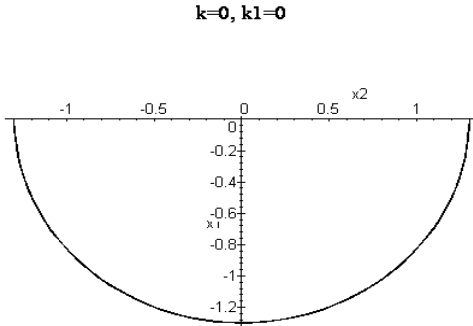
$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1, \quad \frac{d\dot{x}_1}{dt} = g - \lambda x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2, \quad (9)$$

$$\frac{d\dot{x}_2}{dt} = -\lambda x_2.$$

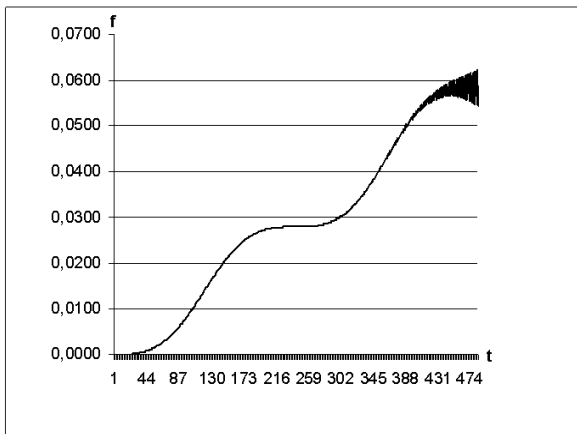
Из условий (5) следует выражение для множителя Лагранжа:

$$\lambda = -\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} (gx_1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), \quad g = 9,81.$$

На рис.1 представлена траектория точки, соответствующая решению системы (8)-(9), при начальных условиях  $x_1^0 = 0, x_2^0 = 1.3, \dot{x}_1^0 = 0, \dot{x}_2^0 = 0$ , не соответствующих уравнению связи (8). Рис.2 указывает на возрастание отклонений решения, соответствующего начальным условиям  $x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, \dot{x}_1^0 = 0, \dot{x}_2^0 = 0$ , от уравнения связи (7) с течением времени при численном решении.



**Рис.1.** Траектория точки, соответствующая точному решению при отклонении начального положения.



**Рис.2.** Изменение отклонения от уравнения связи при численном решении.

Следовательно, требуется такая модификация множителей Лагранжа  $\lambda_\kappa$ , которая ограничивала бы величины  $q^\mu, v^\mu, v^\rho$ , оценивающие отклонения от уравнений связей (3), обусловленные начальными условиями и погрешностями численного интегрирования. Рассматривая параметры  $q^\mu, v^\mu, v^\rho$  как дополнительные "избыточные" координаты, заменим исходную систему расширенной системой [15], фазовое состояние которой определяется обобщенными координатами  $q^i, q^\mu$  и обобщенными скоростями  $v^i, v^\mu, v^\rho$ , удовлетворяющими уравнениям связей

$$q^\mu - f^{\mu-n}(q^i, t) = 0,$$

$$v^\mu - \varphi_i^{\mu-n} v^i - f_t^{\mu-n} = 0, \quad (10)$$

$$v^\rho - f^{\rho-n}(q^i, v^j, t) = 0.$$

Представим лагранжиан  $L$  и диссипативную функцию  $D$  расширенной системы равенствами:

$$L = T - P, \quad 2T = 2T^0 + m_{\eta\theta} (q^k) v^\eta v^\theta,$$

$$2T^0 = m_{ij} (q^k) v^i v^j,$$

$$2P = 2P^0(q^i, t) + k_{\mu\nu} (q^i, t) q^\mu q^\nu,$$

$$2D = 2D^0(q^i, v^j, t) + c_{\eta\theta} (q^i, t) v^\eta v^\theta.$$

$$i, j, k = 1, \dots, n, \quad v = n+1, \dots, n+m,$$

$$\eta, \theta = n+1, \dots, n+m+r.$$

Тогда динамика расширенной системы будет описываться уравнениями

$$\frac{dq^i}{dt} = v^i, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i - \frac{\partial D}{\partial v^i} + \lambda_\kappa \varphi_i^\kappa,$$

$$\frac{dq^\mu}{dt} = v^\mu, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = -\frac{\partial D}{\partial v^\mu}, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^\rho} \right) = -\frac{\partial D}{\partial v^\rho}. \quad (13)$$

Будем предполагать, что коэффициенты  $m_{ij}, m_{\eta\theta}, k_{\mu\nu}, c_{\eta\theta}$  и все их частные производные ограничены в области  $\Omega$  изменения переменных  $q^i, v^j$  и при всех  $t \geq t_0$ . Система уравнений (11)-(13) приводится к виду, разрешенному относительно старших производных:

$$\frac{dq^k}{dt} = v^k, \quad \frac{dq^\mu}{dt} = v^\mu,$$

$$\frac{dv^k}{dt} = m^{ki} \left( m_i + \varphi_i^k \lambda_\kappa + m_i^{(2)} \right), \quad (14)$$

$$\frac{dv^\theta}{dt} = -m^{\theta\eta} \left( k\eta\mu q^\mu + b_{\eta\theta} v^\theta \right),$$

$$m^{ki} = (m_{ik})^{-1}, \quad m^{\theta\eta} = (m_{\eta\theta})^{-1},$$

где  $m_i^{(2)}$  обозначены члены второго и более высокого порядка относительно избыточных переменных  $q^\mu, v^\mu, v^\rho$ .

### 5. Уравнения динамики в канонических переменных

Решение системы дифференциально-алгебраических уравнений (10), (14) представляется более удобным, когда состояние системы определяется каноническими переменными

$$q^i, q^\mu, p_s = \frac{\partial L}{\partial v^s} = m_{sh}(q^l)v^h, \quad l=1, \dots, n+m;$$

$h, s=1, \dots, n+h+r$ . Выражая функцию Гамильтона и уравнения связей (10) через координаты и импульсы:

$$H = \frac{1}{2}m^{ks}(q^l)p_k p_s - P^0(q^i, t) - \frac{1}{2}k_{\mu\nu}(q^i, t)q^\mu q^\nu,$$

$$\psi^\mu = q^\mu - f^{\mu-n}(q^i, t) = 0,$$

$$\omega^\mu \equiv m^{\mu\eta} - f_j^{\mu-n}m^{jk}p_k - f_i^{\mu-n} = 0,$$

$$\omega^\rho \equiv m^{\rho\eta}p_\eta - f^{\rho-n}(q^i, m^{jk}p_k, t) = 0,$$

уравнения динамики можно представить в виде системы  $2n+2m+r$  дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных  $q^i, p_i, q^\mu, p_\mu, p_\rho$ :

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} + Q_i - \frac{\partial D^0}{\partial v^i} + \omega^{ki}\lambda_\kappa, \\ \omega^{ki} &= \frac{\partial \omega^k}{\partial p_i}, \quad \frac{dq^\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \\ \frac{dp_\mu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q^\mu} - \frac{\partial D}{\partial v^\mu}, \quad \frac{dp_\rho}{dt} = -\frac{\partial D}{\partial v^\rho}, \end{aligned} \quad (15)$$

с начальными условиями:  $q^i(t_0) = q^{i0}$ ,  $p_i(t_0) = m_{ij}(q^{k0})v^{j0}$  и  $q^\mu(t_0) = q^{\mu0}$ ,  $p_s(t_0) = p_{s0}$ , которые определяются через значения  $q^{i0}, v^{j0}$  посредством уравнений связей (10) и функцию Лагранжа  $L$ .

### 6. Стабилизация связей

Уравнения динамики расширенной системы (14) состоят из двух частей. Первая часть

$$\frac{dq^k}{dt} = v^k, \quad \frac{dv^k}{dt} = m^{ki}(m_i + \varphi_i^k \lambda_\kappa + m_i^{(2)}),$$

при определенных выражениях множителей  $\lambda_\kappa = \lambda_\kappa(q^i, v^j, t)$ , соответствует уравнениям динамики исходной системы. Вторая часть

$$\frac{dq^\mu}{dt} = v^\mu, \quad (16)$$

$$\frac{dv^\theta}{dt} = -m^{\theta\eta}(k\eta\mu q^\mu + b_{\eta\theta}v^\theta)$$

представляет собой уравнения возмущений связей и используется для определения выражений множителей Лагранжа. Система уравнений относительно множителей Лагранжа получается в результате дифференцирования выражений (6) в силу уравнений системы (16). Решение этой системы приводит к выражению множителя  $\lambda_\kappa$  в виде суммы трех слагаемых  $\lambda_\kappa = \lambda_\kappa^{(0)} + \lambda_\kappa^{(1)} + \lambda_\kappa^{(2)}$ , распределенных по степеням избыточных переменных  $q^\mu, v^\theta$ . Первое слагаемое  $\lambda_\kappa^{(0)}$  не содержит переменных  $q^\mu, v^\theta$  и соответствует множителю Лагранжа в классическом случае. Второе слагаемое  $\lambda_\kappa^{(1)}$  содержит эти переменные в первой степени и может служить для обеспечения асимптотической устойчивости решения исходной системы по отношению к уравнениям связей (3). Третье слагаемое  $\lambda_\kappa^{(2)}$  содержит избыточные переменные  $q^\mu, v^\theta$ , по крайней мере, во второй степени.

Очевидно, система (16) имеет тривиальное решение  $q^\mu = 0, v^\theta = 0$ . Для стабилизации связей необходимо функцию Лагранжа  $L$  и диссипативную функцию  $D$  расширенной системы составить так, чтобы тривиальное решение системы (16) было устойчиво асимптотически.

Обозначив через  $x = (q^i, v^j)$  и  $z = (q^\mu, v^\theta)$  соответственно векторы состояния исходной системы из области допустимых значений  $X$  и вектор возмущений связей, значения которого принадлежат области  $Z$ , представим систему уравнений (16) и уравнения программных связей (6) в виде

$$\frac{dz}{dt} = K(x, t)z, \quad \omega(x, t) = z. \quad (17)$$

Справедливо следующее утверждение.

*Теорема 1.* Если матрица  $K(x, t)$  может быть представлена в виде произведения  $K(x, t) = -A^{-1}L(x, t)$ , матрица  $A$  является постоянной, положительно определенной, матрица  $L = L(x, t)$  – положительно определена при всех  $x \in X, t > t_0$ , и выполняются условия:

- 1)  $\|L(x, t)\| \geq l > 0$ ;
- 2)  $a_1 \leq \|A\| \leq a_2$ ,

то уравнение (17) имеет экспоненциально устойчивое тривиальное решение  $z = 0$ .

Составим функцию Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы с постоянной матрицей коэффициентов:  $2V = z^T A z$ .

Производная  $\frac{dV}{dt} = W(z, x, t)$  функции  $V$ , вычисленная в силу уравнения (17), является определительно-отрицательной квадратичной формой  $2W(z, x, t) = -z^T L(x, t)z$  относительно составляющих вектора  $z$ . Согласно условию 1) теоремы 1 функция  $\frac{dV}{dt} = W(z, x, t)$  ограничена сверху.

$$\frac{dV}{dt} \leq -l \|z\|^2. \quad (18)$$

Из неравенства (18) с учетом условия 2) теоремы следует ограничение на изменения функции  $V$ :  $\frac{dV}{dt} \leq -\frac{2l}{a_2} V$ , или  $V \leq V_0 e^{-\frac{2l}{a_2}(t-t_0)}$ . Согласно условию 2) справедливы также неравенства  $\|z\|^2 \leq 2V/a_1$ ,  $V_0 \leq \frac{1}{2} a_2 \|z_0\|^2$ . Следовательно,  $\|z(t)\|$  является ограниченной экспоненциальной функцией:

$$\|z(t)\|^2 \leq \frac{a_2}{2a_1} \|z_0\|^2 e^{-\frac{2l}{a_2}(t-t_0)} \leq \frac{a_2}{2a_1} \varepsilon^2 e^{-\frac{2l}{a_2}(t-t_0)}.$$

Представим систему уравнений (15) в новых обозначениях в общем виде:

$$\frac{dx}{dt} = v(x, z, t). \quad (19)$$

Уравнения (6) являются частными интегралами системы (19), то есть справедливо равенство

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} v(x, z, t) + \frac{\partial \omega}{\partial t} = K(x, t)z.$$

Пусть для решения системы уравнений (19) используется разностная схема

$$x_{p+1} = x_p + \tau v_p, \quad x_p = x_p(t_p), \quad t_p = t_0 + p\tau,$$

$$v_p = v(x_p, z_p, t_p)$$

и для оценки отклонения от уравнений связей используется квадратичная форма с постоянной матрицей  $A$  коэффициентов

$$2V = z^T A z.$$

Разлагая в ряд функцию  $V_{k+1}$  по степеням  $\tau$ , получим выражение

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} z_k^T N_k z_k + \frac{1}{2} \tilde{R}_k \tau^2, \quad (20)$$

$$N = A + \tau(AK + K^T A),$$

$$\tilde{R} = (z^T AR + R^T Az + z^T K^T AKz) + \tau(z^T K^T AR + R^T AKz) + \tau^2(R^T AR),$$

которое позволит сделать следующее утверждение:

**Теорема 2.** Если при всех  $x \in X, t > t_0$  справедливы ограничения

$$z^T Az \geq a_0 \|z\|^2, \quad \|z_k\| \leq \varepsilon, \quad z^T Nz \leq \alpha a_0 \|z\|^2, \quad \|\tilde{R}\| \leq \bar{R}, \quad \tau^2 \bar{R} \leq \beta a_0 \varepsilon^2, \quad \alpha + \beta \leq 1,$$

то будет выполняться неравенство  $\|z_{k+1}\| \leq \varepsilon$ .

Действительно, оценка левой и правой частей равенства (20) приводит к неравенствам:

$$a_0 \|z_{k+1}\|^2 \leq z_{k+1}^T A z_{k+1} = z_k^T N_k z_k + \tau^2 \tilde{R}_k \leq \alpha a_0 \|z_k\|^2 + \tau^2 \bar{R} \leq \alpha a_0 \varepsilon^2 + \beta a_0 \varepsilon^2 \leq a_0 \varepsilon^2.$$

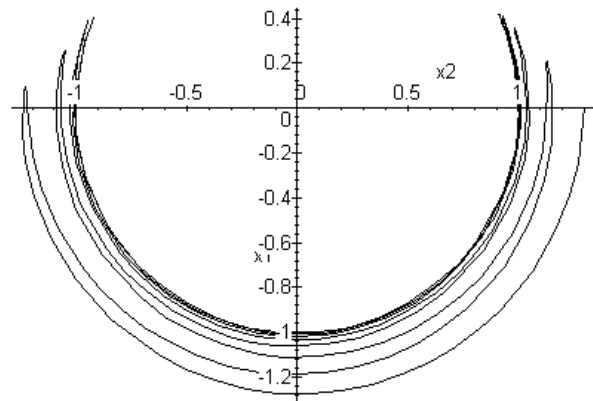
## 7. Приложения

**Пример 2.** В примере 1 стабилизация связи (8) обеспечивается при численном решении системы (9), если множитель  $\lambda$  определяется из условий

$$q^3 = (x_1^2 + x_2^2 - 1)/2, \quad \frac{dq^3}{dt} = v^3, \quad \frac{dv^3}{dt} = -1.5v^3 - 0.5q^3.$$

Результат решения системы (9) методом Эйлера представлен на рис. 3.

$k=0.5, k1=1.5$



**Рис.3.** Траектория, соответствующая приближенному решению при отклонении начального положения точки.

**Пример 3.** Рассмотрим задачу управления элементом адаптивной оптической системы [16], составленного из невесомого кривошипа  $OA$ , вращающегося вокруг оси  $Ox_3$  в плоскости  $Ox_1x_2$ , и закрепленного на нем зеркала  $A$  массы  $m$  (рис.4).

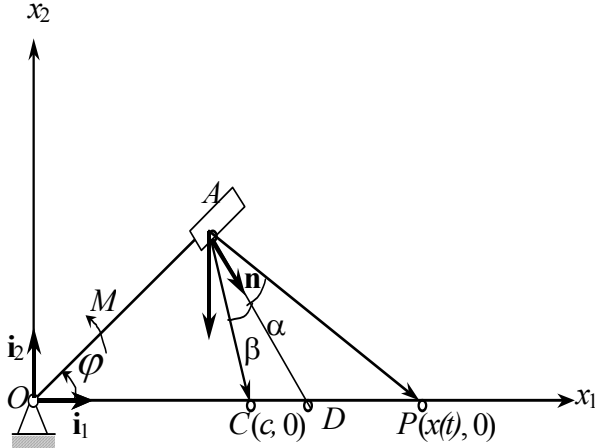


Рис.4. Элемент адаптивной оптической системы.

На зеркало действует сила тяжести  $mg$ , направленная в сторону, противоположную направлению оси  $Ox_2$ . Положение зеркала  $A$  на плоскости  $Ox_1x_2$  определяется углом  $\varphi$  отклонения кривошипа от оси  $Ox_1$  и расстоянием  $OA = R$  до начала координат. Вдоль оси  $Ox_1$  по закону  $x_1 = x(t)$  движется точка  $P$ , из которой исходит луч света, направленный на зеркало  $A$ . Требуется определить выражение момента  $M$ , приложенного к кривошипу, при котором луч, отраженный от зеркала, попадает в фиксированную точку  $C(c, 0)$ , расположенную на оси  $Ox_1$ . Цель управления состоит в поддержании равенства  $\alpha = \beta$  углов падения  $\alpha$  и отражения  $\beta$ , если  $AD \perp OA$ , и определяется уравнением связи:

$$x(t)(2c \cos \varphi - R) - Rc = 0.$$

Динамика элемента адаптивной оптической системы описывается уравнениями

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{R} \cos q + M. \quad (21)$$

Уравнения программных связей записываются в виде:

$$x(t)(2c \cos q - R) - Rc = y, \quad (22)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} (2c \cos q - R) - 2cvx(t) \sin q = y'. \quad (23)$$

Составим уравнения возмущений связей:

$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = k_{21}y + k_{22}y'. \quad (24)$$

Из равенств (21)-(24) определяется выражение управляющего момента  $M$ :

$$M = -\frac{I}{2cx(t)\sin q} (k_{21}y + k_{22}y') + \frac{I}{2cx(t)\sin q} \frac{d^2x(t)}{dt^2} (2c \cos q - R) - \frac{2}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} v + \frac{g}{R} \cos q - v^2 \operatorname{ctg} q. \quad (25)$$

Система уравнений (21) с учетом выражения (25) принимает вид:

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2cx(t)\sin q} \times \left( \frac{d^2x(t)}{dt^2} (2c \cos q - R) - k_{21}y - k_{22}y' \right) - \frac{2}{x(t)} \left( \frac{dx(t)}{dt} + v \frac{\cos q}{\sin q} \right) v. \quad (26)$$

Тривиальное решение  $y = y' = 0$  системы (24) устойчиво экспоненциально, если  $k_{21} < 0, k_{22} < 0$ .

Выберем функцию  $V = \frac{1}{2} z^T A z$ ,  $z = (y, y')$ , матрица

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$  коэффициентов которой

удовлетворяет условиям Сильвестра. Для решения системы уравнений (26) использовался метод Эйлера. Численный эксперимент проведен при следующих данных:

$$R = 3.4641, \quad c = 3, \quad x(t) = 2c + 0.5 \cos t - 1,$$

$$m = 1,$$

$$\varphi_0 = 0.4685, \quad v_0 = -0.005,$$

$$a_{11} = a_{22} = 1.1, \quad a_{12} = 0.1, \quad a_0 = 1,$$

$$\bar{R} = 1.$$

Полагая  $k_{21} = -2, k_{22} = -3, \varepsilon = 0.01, \tau = 0.001$ ,

определим матрицу  $N = \begin{pmatrix} 1.0988 & 0.0940 \\ 0.0940 & 1.0892 \end{pmatrix}$  и получим следующие ограничения для величин  $\alpha, \tau$ :

$\alpha > 0.9901, \tau < 0.00104$ , которым удовлетворяют значения  $\alpha = 0.991, \beta = 0.009, \tau = 0.001$ . На рис.5.а)-5.г) приведены графики функций  $x = x(t), \varphi = \varphi(t), y = y(t), y' = y'(t)$ .

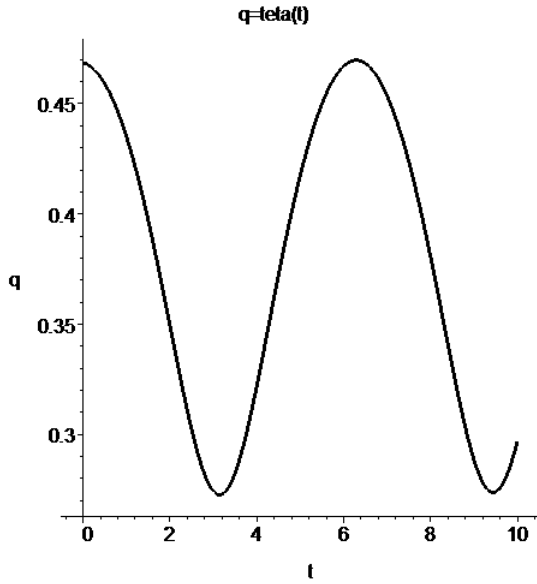


Рис.5а). График изменения положения зеркала.

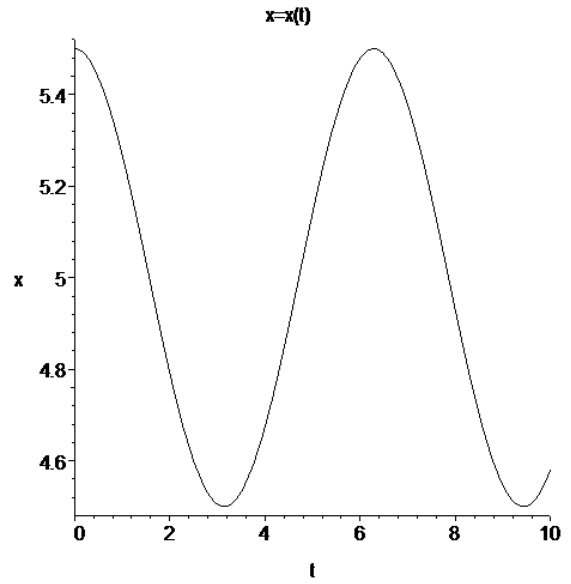


Рис.5б). График движения точки.

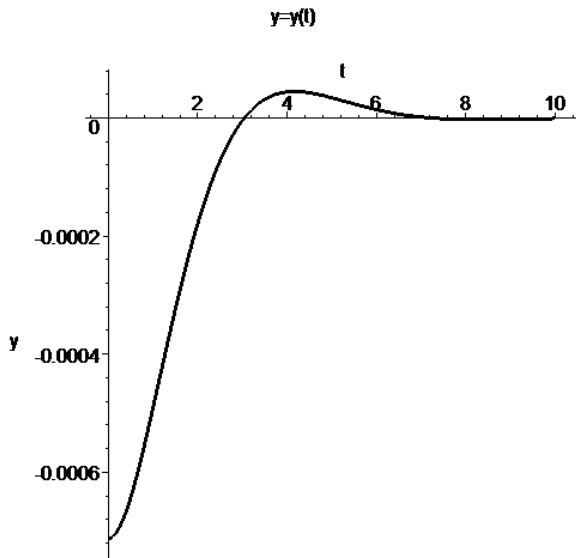


Рис.5в). График изменения отклонения от уравнения связи.

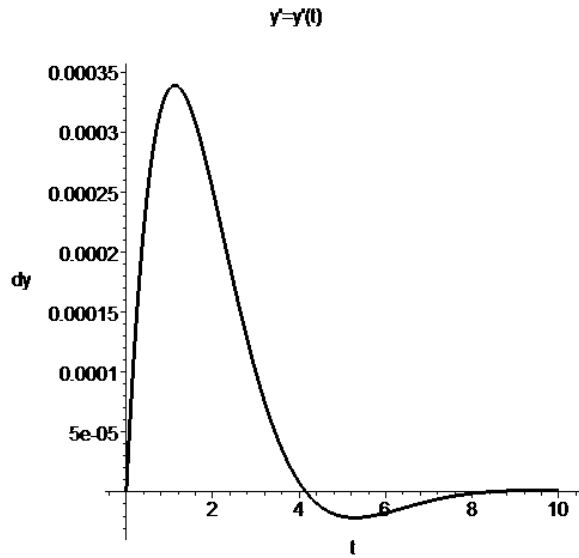


Рис.5г). График изменения производной отклонения от уравнения связи.

Рис.5.

Пример 4. Электромеханическая система. В системе привода кривошипно-шатунного механизма [17] блок питания обеспечивает подачу электрической мощности двигателю переменного тока. Переменный ток через выпрямитель по-

дается в двигатель постоянного тока, который, в свою очередь, управляет работой кривошипно-шатунного механизма, расположенного в однородном поле силы тяжести.

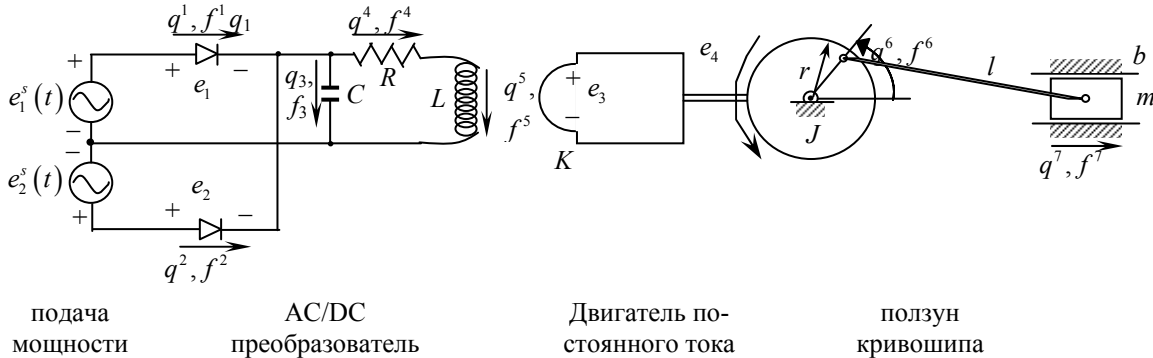


Рис.6. Электромеханическая система.

Построена система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных, которая содержит 9 уравнений с 9 неизвестными. Построение уравнений возмущений и решение системы дифференциальных уравнений динамики проводилось О.В.Шемеловой с помощью интегрированной системы компьютерной символьной математики Maple 7. Решение системы дифференциально-алгебраических уравнений и построение фазовых портретов были осуществлены с помощью графической функции *phaseportrait* методом Эйлера с шагом  $h=0,01$ .

На рис.7 и рис.8 представлены графики, соответствующие уравнению голономной связи  $(q^7 - r \cos q^6)^2 + (r \sin q^6)^2 = l^2$ , полученные в результате кинематического и динамического расчетов. Графики изменения фазовых координат во времени  $q^3(t), q^6(t), f^6(t), q^7(t), f^7(t)$  представлены соответственно на рис.9, 10, 11, 12, 13. Фазовые портреты, отражающие зависимости переменных  $f^5(q^5), f^6(q^6), f^7(q^7)$ , вследствие решения уравнений динамики изображены на рис.13, 14, 15.

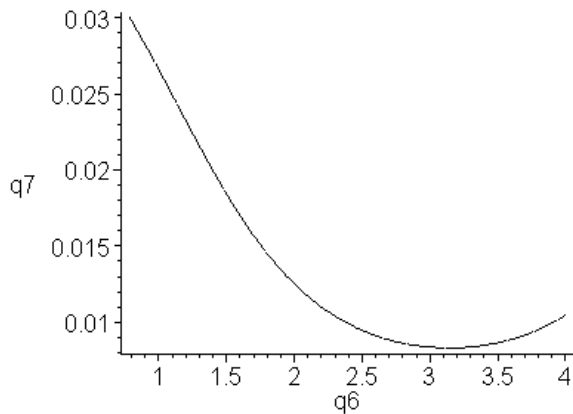


Рис.7. Кинематический расчет голономной связи.

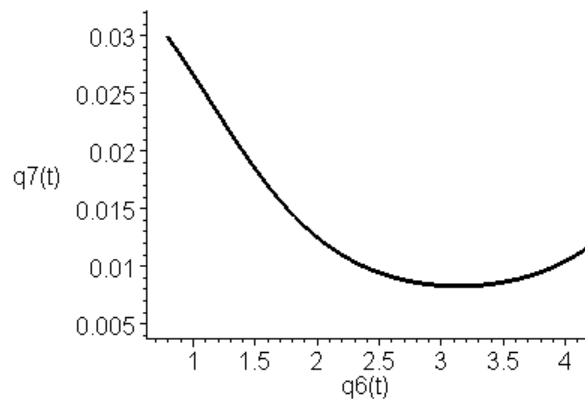


Рис.8. Динамический расчет голономной связи.

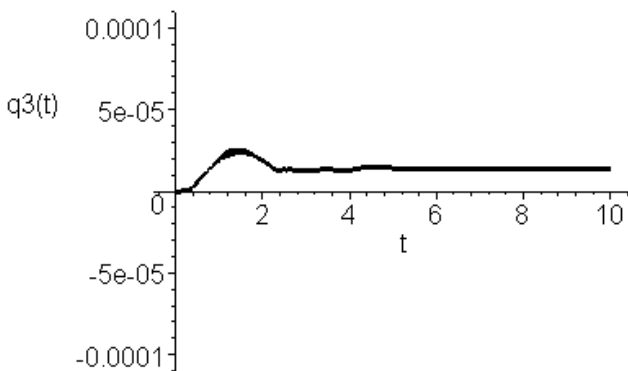


Рис.9. Зависимость  $q^3 = q^3(t)$ .

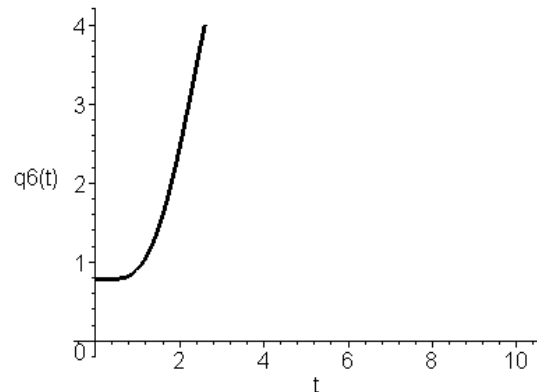


Рис.10. Зависимость  $q^6 = q^6(t)$ .

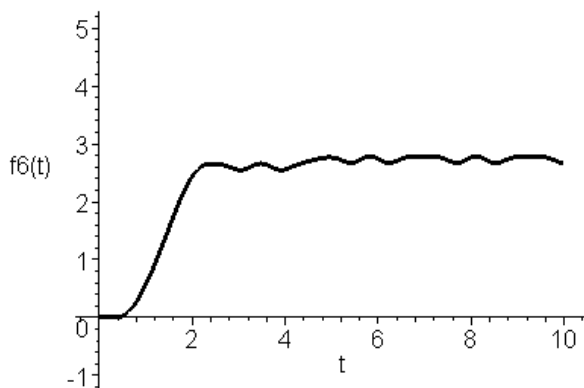


Рис.11. Зависимость  $f^6 = f^6(t)$ .

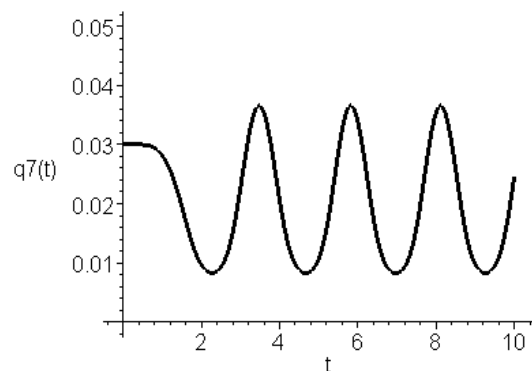


Рис.12. Зависимость  $q^7 = q^7(t)$ .



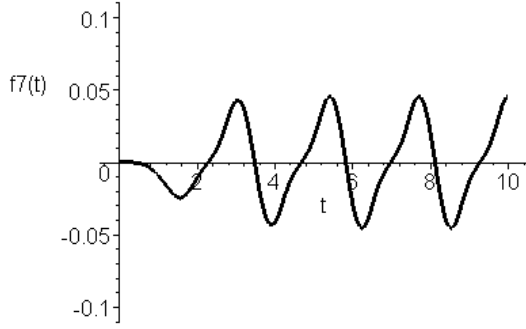


Рис.13. Зависимость  $f^7 = f^7(t)$ .

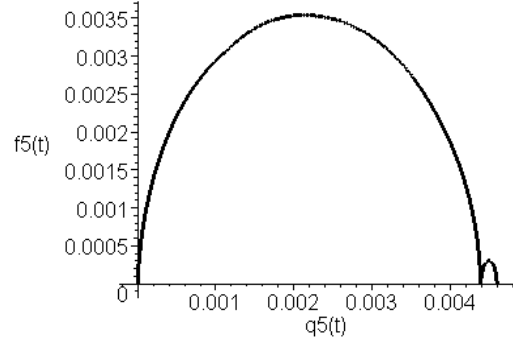


Рис.14. Зависимость  $f^5 = f^5(q^5)$ .

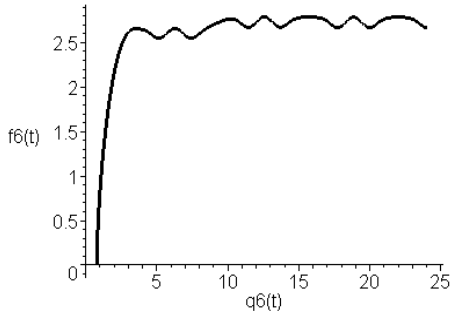


Рис.15. Зависимость  $f^6 = f^6(q^6)$ .

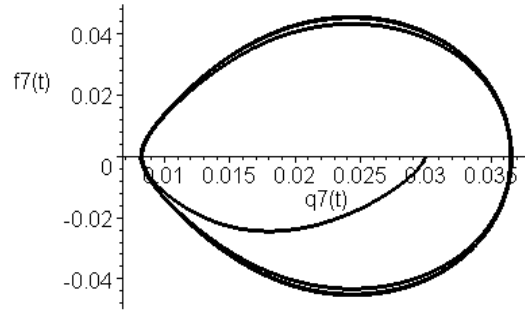


Рис.16. Зависимость  $f^7 = f^7(q^7)$ .

*Пример 5. Управление движением колесной системы по заданной траектории.* Движение трехколесной тележки управляется моментами, приложенными к колесам задней оси и к рулевому приводу, соединенному с передним колесом [18]. Фазовое состояние колесной системы определяется обобщенными координатами  $q_i$  и скоростями  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$  ( $i=1, \dots, 7$ ). Выражения управляющих моментов определяются в соответствии с требованием движения центра масс  $M(q_1, q_2)$  системы из произвольной точки пространства  $q_1 O q_2$  к движущейся точке  $A$ , образованной пересечением прямых  $q_1 = -k_1 t$  и  $q_2 = 0$ , с обходом двух препятствий, заданных уравнениями

$$(q_1 + 2 + k_2 t)^2 + 4q_2^2 = 1,$$

$$\frac{1}{4}(q_1 - 1 + k_3 t)^2 + \frac{16}{9}\left(q_2 - \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$$

В результате моделирования в системе компьютерной математики Maple построены уравнения программных связей:

$$\phi_1 \equiv F_1 \left( \sin q_3 \cos q_4 + \frac{L}{l_2} \cos q_3 \sin q_4 \right) +$$

$$+ F_2 \left( \sin q_3 \sin q_4 - \frac{L}{l_2} \cos q_3 \cos q_4 \right) = y,$$

$$\psi_1 \equiv \dot{q}_1 - F_1 = y'_1, \quad \psi_2 \equiv \dot{q}_2 - F_2 = y'_2,$$

$L = l_1 + l_2$  – база системы,  $l_1$  и  $l_2$  – расстояния от центра масс колесной системы до ее передней и соответственно задней оси,

$$F_1 = -\frac{16}{39}(q_1 + k_1 t)g_1 g_2 - 4(q_1 + k_1 t)q_2^2 g_2 -$$

$$-\frac{8}{9}(q_1 + k_1 t)(2q_2 - 3)q_2 g_1 - g_4 g_5 g_6,$$

$$F_2 = -\frac{42}{29}q_2 g_1 g_2 + (q_1 + k_1 t)(q_1 + 2 + k_2 t)q_2 g_2 +$$

$$+ (q_1 + k_1 t)(q_1 - 1 + k_3 t)q_2 g_1 - g_3 g_5 g_6,$$

$$g_1 = \frac{1}{2}\left((q_1 + 2 + k_2 t)^2 + 4q_2^2 - 1\right),$$

$$g_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(q_1 - 1 + k_3 t)^2 + \frac{16}{9}\left(q_2 - \frac{3}{2}\right)^2 - 1\right),$$

$$g_3 = (q_1 + k_1 t)g_1 g_2 + 4(q_1 + k_1 t)q_2^2 g_2 +$$

$$+\frac{8}{9}(q_1 + k_1 t)(2q_2 - 3)q_2 g_1,$$

$$g_4 = q_2 g_1 g_2 + (q_1 + k_1 t)(q_1 + 2 + k_2 t)q_2 g_2 +$$

$$+ (q_1 + k_1 t)(q_1 - 1 + k_3 t)q_2 g_1,$$

$$g_5 = k_1 q_2 g_1 g_2 + k_2 (q_1 + k_1 t)(q_1 + 2 + k_2 t)q_2 g_2 +$$

$$+ k_3 (q_1 + k_1 t)(q_1 - 1 + k_3 t)q_2 g_1,$$

$$g_6 = [g_3^2 + g_4^2]^{-1}.$$

Уравнения динамики составляют семь дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных. Результаты чис-

ленного моделирования динамики управляемой системы представлены на рис.17-21. На рис.17 приведена траектория движения точки  $M$  колесной системы в пространстве  $q_1Oq_2$  с обходом двух препятствий, движущихся навстречу друг

другу со скоростями  $k_3, k_4$ . На рис.18-21 представлены графики отклонений  $y_1, \dot{y}_1, y'_1, y'_2$  от уравнений связей  $\phi_1 = 0, \dot{\phi}_1 = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 = 0$ .

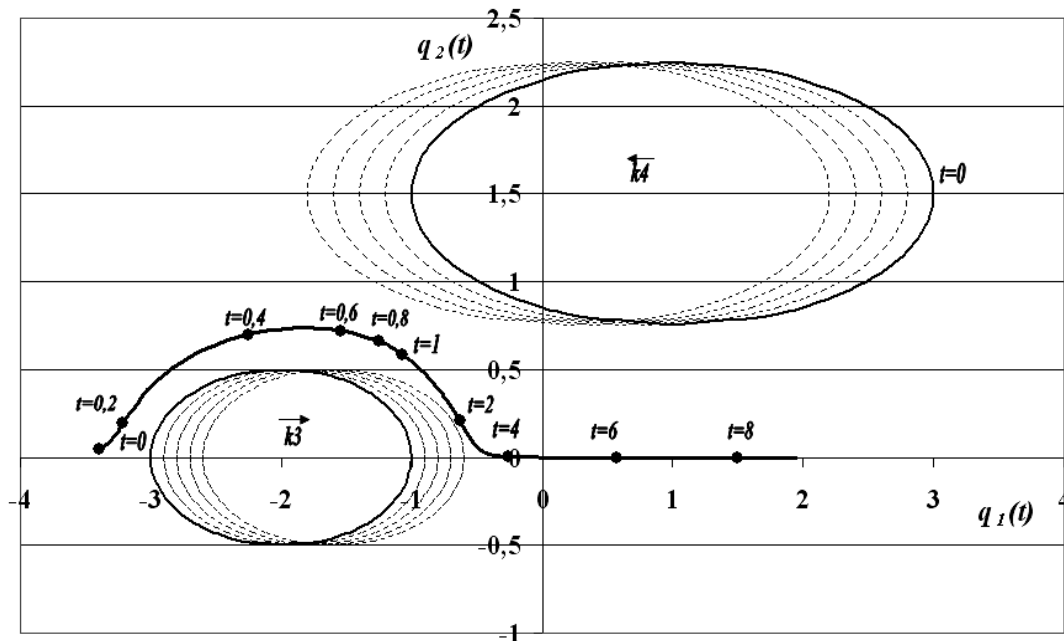


Рис.17. Траектория движения центра масс колесной системы.

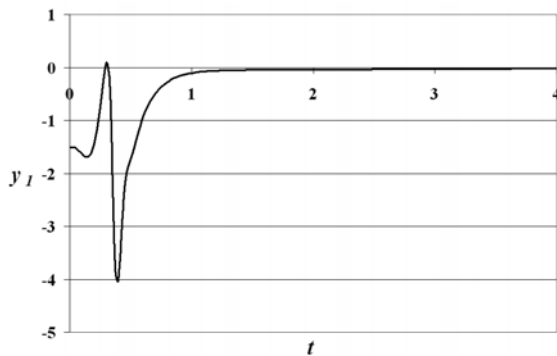


Рис.18. Отклонение  $y_1$  от уравнения голономной связи  $\phi_1 = 0$ .

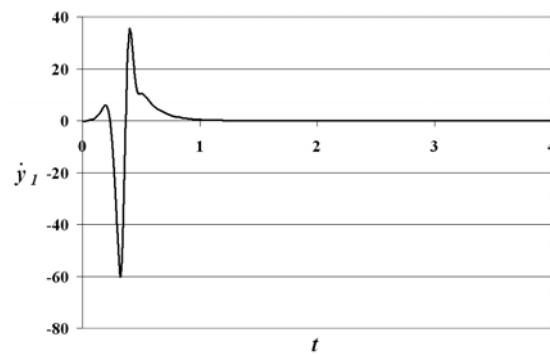


Рис.19. Отклонение  $\dot{y}_1$  от уравнения дифференциальной связи  $\dot{\phi}_1 = 0$ .

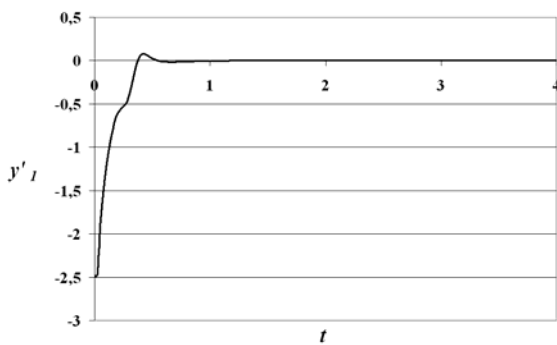


Рис.20. Отклонение  $y'_1$  от уравнения неголономной связи  $\psi_1 = 0$ .

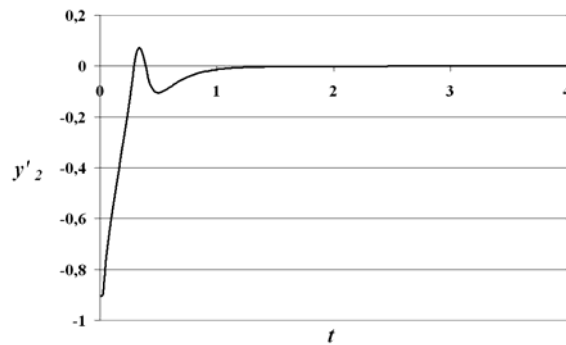


Рис.21. Отклонение  $y'_2$  от уравнения неголономной связи  $\psi_2 = 0$ .

*Пример 6. Планирование выпуска продукции и управление нефтеперерабатывающим предприятием. Решение многокритериальной задачи*

планирования выпуска продукции и синтеза управления условным нефтеперерабатывающим заводом (НПЗ) предложено в [19] (рис.22).

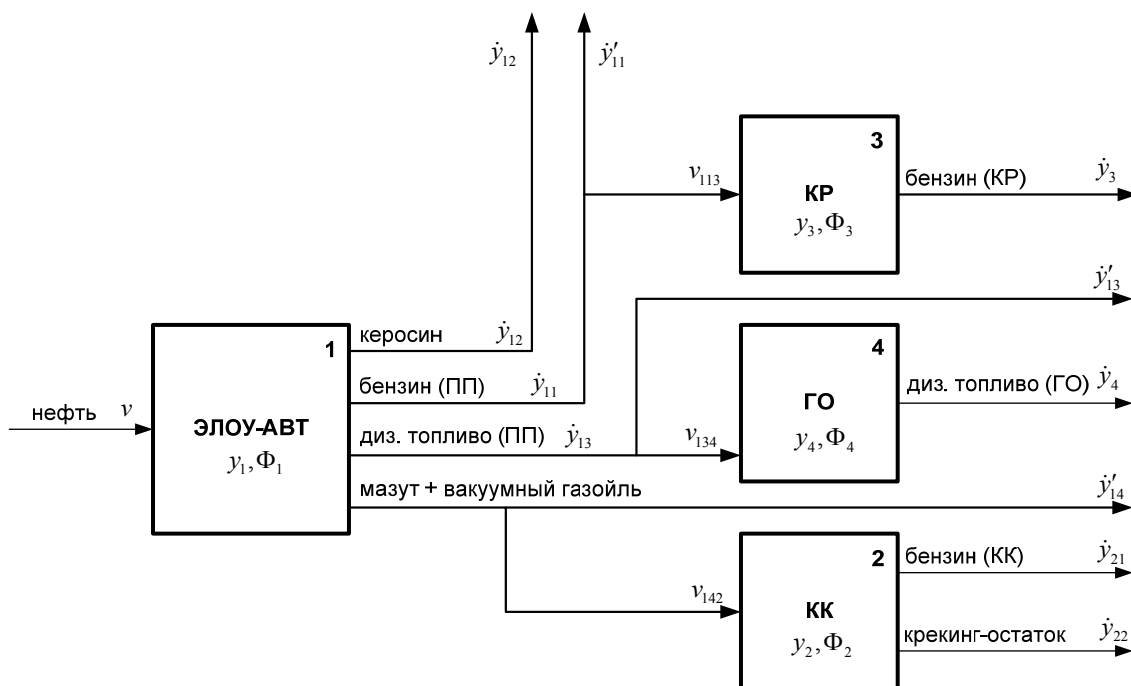


Рис.22. Блок-схема условного нефтеперерабатывающего завода.

НПЗ состоит из четырех установок: комбинированная электро-обессоливающая установка и установка атмосферно-вакуумной перегонки нефти (ЭЛОУ-АВТ),

установка каталитического крекинга (КК), установка каталитического риформинга (КР) и установка гидроочистки (ГО).

Товарными продуктами являются автобензин, дизельное топливо, керосин, мазут и котельное топливо. На вход установки ЭЛОУ-АВТ поступает сырая нефть, сырье, разделенное на фракции установкой ЭЛОУ-АВТ, поступает на вход следующих установок. Для НПЗ характерно, что часть продукции производственного объединения направляется на другие объекты или на циркуляцию в качестве сырья. Пусть поток выпуска  $j$ -го вида продукции  $i$ -го объекта в количестве  $y'_{ij}$  идет на внешнее потребление, а другая часть  $v_{ijz}$  используется в виде оборотных фондов  $z$ -го производственного объекта.

Выходными продуктами установки ЭЛОУ-АВТ являются:

товарный керосин, бензин прямой перегонки (ПП), часть которого поступает в качестве сырья на установку КР для получения бензина КР,

дизельное топливо ПП, часть которого поступает на установку ГО для получения дизельного топлива ГО,

товарный мазут

и вакуумный газойль – продукт вакуумной перегонки мазута, поступающий на установку КК.

Товарный бензин получается смешением бензина ПП, КР и КК.

С учетом предположения о постоянстве во времени коэффициентов пропорциональности оборотных фондов (ОФ) составим уравнения выпуска продукции, согласованные с материальным балансом установок:

$$\begin{aligned} y_{11} &= 0,157v_1, \quad y_{12} = 0,085v_1, \\ y_{13} &= 0,225v_1, \quad y_{14} = 0,45v_1, \\ y_{21} &= 0,224v_{142}, \quad y_{22} = 0,695v_{142}, \\ y_3 &= 0,85v_{113}, \quad y_4 = 0,94v_{134}. \end{aligned} \quad (27)$$

Технологические связи внутри завода определяются равенствами

$$\begin{aligned} y_{11} &= y'_{11} + v_{113}, \quad y_{13} = y'_{13} + v_{134}, \\ y_{14} &= y_{14} + v_{142}. \end{aligned} \quad (28)$$

Мощности ПО на начало планируемого периода в млн. т./год известны:

$$y_1^0 = 7,336, \quad y_2^0 = 0,919, \quad y_3^0 = 0,765, \quad y_4^0 = 0,94.$$

Пусть заводу установлено задание по выработке следующих продуктов

Товарный продукт	Задание, млн. т./год
Керосин	0,5
Дизельное топливо	1,2
Мазут	2
Автобензин	0,5

Уравнения

$$y'_{11} + y_{21} + y_3 = 0,5, \quad y'_{12} = 0,5, \quad y'_{13} + y_4 = 1,2$$

определяют задание по выработке. Цели управления представим программными связями

$$\begin{aligned}
 y_{12} - 0,5 &= \alpha_1(t), \\
 y'_{13} + \left(1 - \frac{1}{0,94}\right)y_4 - 1,2 &= \alpha_2(t), \\
 y_{14} - y_{21} - 2 &= \alpha_3(t), \\
 y_{11} + y_{21} + \left(1 - \frac{1}{0,85}\right)y_3 - 0,5 &= \alpha_4(t),
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

правые части которых определяются из уравнений возмущений связей

$$\frac{d\alpha_\mu}{dt} = \sum_{\nu=1}^M p_{\mu\nu}(t)\alpha_\nu.
 \tag{30}$$

Таким образом, задача сводится к определению управляющих воздействий  $u_{i,1}$ ,  $u_{i,2}$  в правых частях уравнений динамики

$$\frac{dY_{ij}}{dt} = y_{ij}, \quad \frac{ds_i}{dt} = -\beta_i s_i + u_{i,1}, \quad y_{ij} \frac{dm_{ij}}{dt} = \gamma_i Y_{ij} - u_{i,2},$$

обеспечивающих выполнение уравнений программных связей (29) и уравнений возмущений связей (30).

\*\*\*\*\*

1. *Ольсон Г.* Динамические аналогии. – М.: Гос. изд-во иностр. литер., 1947. – 224 с.
2. *Layton R.A.* Principles of Analytical System Dynamics. –N.-Y. Springer, 1998. – 158 p.
3. *Грдина Я.И.* Динамика живых организмов // Изв. Екатеринбург. высш. горн. уч-ща. – 1912. – Вып.1. – С.3-38.
4. *Корнев Г.В.* Введение в механику человека. – М.: Наука, 1977. – 263 с.
5. *Пятницкий Е.С.* Избр. тр.: в 3 т. – М.: Изд. физико-математической литературы, 2006. – Т.3: Теоретическая биомеханика. – 448 с.
6. *Саитов Р.И.* Математическая модель процесса познания // Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах России на современном этапе. – Ч.2. Материалы II Уральского региональной межвуз. научно-практич. конф. 19-21 мая 1997 г. – Уфа, 1997. – С.66-67.
7. *Сиразетдинов Т.К.* Динамическая модель прогнозирования и оптимальное управление экономическим объектом // Изв. ВУЗов, Авиационная техника. – 1972. – №4. – С.3-8.
8. *Сиразетдинов Т.К.* Динамическое моделирование экономических объектов. – Казань: Фэн, 1996. – 223 с.

9. *Сиразетдинов Т.К., Родионов В.В., Сиразетдинов Р.Т.* Динамические модели экономического региона. – Казань: Фэн, 2005. – 320 с.
10. *Меццерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.; Л.: Гостехиздат, 1952. – 280 с.
11. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
12. *Новоселов В.С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. – Л.: Ленинград. гос. ун-т, 1969. – 240 с.
13. *Мухарлямов Р.Г.* Моделирование динамики простейших экономических объектов как систем с программными связями // Вестник РУДН. – Сер.: Физ.-мат. науки. – 2007. – №1. – С.25-34.
14. *Ахметов А.А., Мухарлямов Р.Г.* Применение методов моделирования механических систем для управления экономическими объектами // Вест. КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2008. – №2. – С.81-84.
15. *Мухарлямов Р.Г.* Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // ПММ. – 2006. – Т.70. – №2. – С.236-249.
16. Адаптивная оптика: сб. перевод. / под редакцией Э.А.Витриченко. – М.: Мир. 1980. – 456 с.
17. *Мухарлямов Р.Г.* Приведение уравнений движений механических систем на многообразиях фазового пространства к заданной структуре // Вест. КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2007. – С.84-89.
18. *Ибушева О.В., Мухарлямов Р.Г.* Математическое моделирование динамики механических систем с заданными кинематическими свойствами // Инновации и высокие технологии XXI века: матер. Всерос. научно-практич. конф. (28-30 апреля 2009 г., г.Нижнекамск): в 2 т. / под ред. В.И.Елизарова, М.А.Закирова. – Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) КГТУ, 2009. – Т.1. – С.174-178.
19. *Ахметов А.А., Мухарлямов Р.Г.* Моделирование многопродуктовых производственных объектов с программными связями // Инновации и высокие технологии XXI века: матер. Всерос. научно-практич. конф. (28-30 апреля 2009 г., г.Нижнекамск): в 2 т. / под ред. В.И.Елизарова, М.А.Закирова. – Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) КГТУ, 2009. – Т.1. – С.143-147.

## CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEM CONTAINING ELEMENTS OF DIFFERENT PHYSICAL NATURE

R.G.Mukharlyamov, O.V.Matukhina, A.A.Akhmetov

The article deals with the problem of control of dynamical system of different physical nature. The authors offer the method for mathematical model construction for systems dynamics. Derived dynamics equations provide constraints stabilization and require accuracy of numerical solution of the correspond-

ing system of differential algebraic equations representing constraints applied to the system, its kinematics and dynamics.

**Key words:** dynamics control, constraints stabilization, mathematical modeling, numerical methods.

\* \* \* \* \*

**Мухарлямов Роберт Гарабшевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Российского университета дружбы народов.

E-mail: [rmuharliamov@sci.pfu.edu.ru](mailto:rmuharliamov@sci.pfu.edu.ru)

**Матухина Олеся Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий Нижнекамского химико-технологического института (филиала) Казанского государственного технического университета им.А.Н.Туполева.

E-mail: [matukhinaov@mail.ru](mailto:matukhinaov@mail.ru)

**Ахметов Арман Абдумуратович** – старший преподаватель кафедры математики Нижнекамского химико-технологического института (филиала) Казанского государственного технического университета им.А.Н.Туполева.

E-mail: [armanakhmetov@rambler.ru](mailto:armanakhmetov@rambler.ru)

Поступила в редакцию 21.04.2011