УДК 517.946

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ В-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

© Ф.Г.Мухлисов, Л.Ф.Галяутдинова

В работе строится фундаментальное решение вырождающегося B-эллиптического уравнения с отрицательным параметром и изучаются его элементарные свойства.

Ключевые слова: математическая физика, дифференциальное уравнение, краевая задача, фундаментальное решение.

Пусть D^+ – конечная область в первой четверти E_2^+ координатной плоскости O_{xy}, ограниченная кривой Γ^+ с концами в точках $A(1,0)$ и $B(0,1)$ и отрезками $\Gamma_1=[OA]$ и $\Gamma_0=[OB]$ осей координат соответственно O_x и O_y, $D_e^+=E_2^+\setminus\overline{D}^+$, $D_{10}^+=D^+\cup\Gamma_1\cup\Gamma_0$.

Рассмотрим вырождающееся B-эллиптическое уравнение с параметром вида:

$$T_B(u)=y^m B_x u+\partial^2 u/\partial y^2-\lambda^2 y^m u=0, \qquad (1)$$

где $B_x=\partial^2/\partial x^2+k/x\cdot\partial/\partial x$ – оператор Бесселя, $m>0, k>0, \lambda$ – заданные действительные числа.

Множество четных по x бесконечно непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в E_2^+ обозначим через $\mathcal{D}_B^+$. Функции из множества $\mathcal{D}_B^+$ будем называть основными.

Определение 1. Функция $\varepsilon(x,y;x_0,y_0)$ называется фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $M_0(x_0,y_0)\in E_2^+$, если она является решением уравнения (1) во всех точках $E_2^+\setminus M_0(x_0,y_0)$ и удовлетворяет для любой основной функции $\varphi(x,y)\in\mathcal{D}_B^+$, такой, что $\varphi(x_0,y_0)\neq 0$, равенству

$$\iint_{E_2^+}\varepsilon(x,y;x_0,y_0)T_B(y)x^k dxdy=-\varphi(x_0,y_0), \qquad (2)$$

или в терминах обобщенных функций уравнению $T_B(\varepsilon(x,y;x_0,y_0))=-\delta(x_0-x,y_0-y)$.

Пусть $\alpha=m/(m+2)$. С помощью замены переменных по формулам

$$\xi=x,\eta=(1-\alpha)y^{1/(1-\alpha)} \qquad (3)$$

уравнение (1) приводится к B-эллиптическому уравнению с параметром

$$B_\xi u+\partial^2 u/\partial\eta^2+\alpha/\eta\cdot\partial u/\partial\eta-\lambda^2 u=0. \qquad (4)$$

Ясно, что $0<\alpha<1$ при $m>0$. Пусть $r=\left(\xi^2+\eta^2\right)^{1/2}$. Ищем решение уравнения (4) в виде

$$u(\xi,\eta)=\upsilon(r). \qquad (5)$$

Подставляя функцию (5) в уравнение (4), получаем

$$\upsilon''+(k+\alpha+1)/r\cdot\upsilon'-\lambda^2\upsilon=0. \qquad (6)$$

Умножая это уравнение на r^2, имеем

$$r^2\upsilon''+(k+\alpha+1)r\upsilon'-\lambda^2 r^2\upsilon=0. \qquad (7)$$

С помощью замены переменных по формулам

$$\upsilon=(t/\lambda)^{-(k+\alpha)/2}W, r=t/\lambda \qquad (8)$$

уравнение (7) приводится к уравнению Бесселя от чисто мнимого аргумента

$$t^2W''+tW'-\left(t^2+\nu^2\right)W=0, \qquad (9)$$

где $\nu=(k+\alpha)/2$. Известно [1], что частными решениями этого уравнения являются функции Бесселя от чисто мнимого аргумента $I_\nu(t), I_{-\nu}(t)$ и функция Макдональда

$$K_\nu(t)=\pi/2\cdot\left(I_\nu(t)-I_{-\nu}(t)\right)/\sin\nu\pi. \qquad (10)$$

Возвращаясь в (10) к переменной r, с учетом формул (8), получим частное решение уравнения (6)

$$\upsilon(r)=\gamma r^{-\nu}K_\nu(\lambda r), \qquad (11)$$

где γ – нормирующая постоянная.

Известно [1], что при $r\to\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула

$$\upsilon(r)=O\left(e^{-r}\right). \qquad (12)$$

Из разложения функций $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ в степенной ряд следует, что решение (11) может быть представлено в виде

$$\upsilon(r)=\frac{\gamma\pi}{2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}r^{-2\nu}+\psi(r), \qquad (13)$$

где $\psi(r)$ – функция, имеющая в начале координат степенную особенность вида $r^{-2\beta}$, где $\beta < \nu$.

Функция (13) является решением уравнения (4) и имеет в начале координат степенную особенность вида $r^{-2\nu}$.

Для получения решения уравнения (4) с особенностью в точке $(0,\eta_0) \in \overline{E}_2^+$ применим к функции (13) оператор обобщенного сдвига $T_\eta^{\eta_0}$:

$$g(\xi,\eta;0,\eta_0) = \frac{\gamma\pi C_\alpha}{2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)} \times$$
$$\times \int_0^\pi \left(\xi^2 + \eta^2 + \eta_0^2 - 2\eta\eta_0\cos\varphi\right)^{-\nu} \sin^{\alpha-1}\varphi d\varphi + \tag{14}$$
$$+\psi^*(\xi,\eta;\eta_0),$$

где $\psi^*(\xi,\eta;\eta_0)$ – регулярная функция в точке $P_0(0,\eta_0)$,

$$C_\alpha^{-1} = \int_0^\pi \sin^{\alpha-1}\varphi d\varphi = \pi^{1/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((\alpha+1)/2).$$

Докажем, что интеграл в (14) имеет степенную особенность в точке $P_0(0,\eta_0)$. Для этого интеграл запишем в виде

$$J = \int_0^\pi \left(r_{PP_0}^2 + 4\eta\eta_0\sin^2(\varphi/2)\right)^{-\nu} \times$$
$$\times \sin^{\alpha-1}\varphi d\varphi + \psi^*(\xi,\eta;\eta_0). \tag{15}$$

Ясно, что разность $\Phi(\xi,\eta;\eta_0)$ между интегралом (15) и интегралом

$$\int_0^\pi \varphi^{\alpha-1}\left(r_{PP_0}^2 + \eta\eta_0\varphi^2\right)^{-\nu} d\varphi \tag{16}$$

является регулярной функцией от ξ,η даже в точке $P_0(0,\eta_0)$ (т.е. для $r_{PP_0} = 0$). Так что интеграл J можно представить в виде

$$J = \int_0^\pi \left(r_{PP_0}^2 + \eta\eta_0\varphi^2\right)^{-\nu} \varphi^{\alpha-1} d\varphi + \Phi(\xi,\eta;\eta_0).$$

Производя в этом интеграле замену переменной по формуле $\varphi = r_{PP_0}(\eta\eta_0)^{-1/2}\tau$, получаем

$$J = r_{PP_0}^{-k}(\eta\eta_0)^{-\alpha/2} \times$$
$$\times \int_0^{\pi(\eta\eta_0)^{1/2}/r_{PP_0}} \left(1+\tau^2\right)^{-\nu} \tau^{\alpha-1} d\tau + \Phi(\xi,\eta;\eta_0). \tag{17}$$

При малых значениях r_{PP_0} этот интеграл также можно записать в виде

$$J = r_{PP_0}^{-k}(\eta\eta_0)^{-\alpha/2} \times$$
$$\times \int_1^{\pi(\eta\eta_0)^{1/2}/r_{PP_0}} \left(1+\tau^2\right)^{-\nu} \tau^{\alpha-1} d\tau + \Phi_1(\xi,\eta;\eta_0). \tag{18}$$

Разлагая подынтегральную функцию в (18) в степенной ряд, получим

$$\tau^{\alpha-1}\left(1+\tau^2\right)^{-\nu} = \tau^{-(k+1)}\left(1+1/\tau^2\right)^{-(k+\alpha)/2} =$$
$$= \tau^{-(k+1)}\left[1 - (k+\alpha)/2\cdot\tau^{-2} + \frac{(k+\alpha)/2((k+\alpha)/2+1)}{2!}\tau^{-4} - \right.$$
$$\left. - \frac{(k+\alpha)/2((k+\alpha)/2+1)((k+\alpha)/2+2)}{3!}\tau^{-6} + \cdots\right] =$$
$$= \tau^{-(k+1)} - (k+\alpha)/2\cdot\tau^{-(k+3)} + +$$
$$\frac{(k+\alpha)/2((k+\alpha)/2+1)}{2!}\tau^{-(k+5)} -$$
$$-\frac{(k+\alpha)/2((k+\alpha)/2+1)((k+\alpha)/2+2)}{3!}\tau^{-(k+7)} + \cdots$$

Ясно, что этот ряд сходится равномерно в промежутке $[1;\infty)$. Поэтому его можно интегрировать в этом промежутке почленно. В результате имеем

$$J = (\eta\eta_0)^{-\alpha/2}/k \cdot r_{PP_0}^{-k} + \Phi_2(\xi,\eta;\eta_0), \tag{19}$$

где $r_{PP_0} = \left(\xi^2 + (\eta-\eta_0)^2\right)^{1/2}$ – расстояние между точками $P(\xi,\eta)$ и $P_0(0,\eta_0)$, $\Phi_2(\xi,\eta;\eta_0)$ – регулярная в точке $P_0(0,\eta_0)$ функция. Отсюда и из (16) следует, что решение $g(\xi,\eta;0,\eta_0)$ уравнения (4) в E_2^+ в точках координатной оси $\xi = 0$ может быть представлено в виде

$$g(\xi,\eta;0,\eta_0) = \gamma\frac{\pi(\eta\eta_0)^{-\alpha/2}C_\alpha}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}r_{PP_0}^{-k} +$$
$$+\Phi_3(\xi,\eta;\eta_0). \tag{20}$$

Возвращаясь в (20) к переменным x и y, с учетом формул (3) и значений $\nu = (k+\alpha)/2$, $\alpha = m/(m+2)$ имеем

$$\varepsilon(x,y;0.y_0) = \gamma\frac{\pi(yy_0)^{-m/4}C_\alpha}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}\rho^{-k} +$$
$$+\Phi_4(x,y;y_0), \tag{21}$$

где $\rho = \left(x^2 + 4/(m+2)^2\cdot\left(y^{(m+2)/2} - y_0^{(m+2)/2}\right)^2\right)^{1/2}$.

Отсюда следует, что решение (21) уравнения (1) имеет в точках координатной оси $x = 0$ степенную особенность вида ρ^{-k}, такую же особенность, что и фундаментальное решение вырождающегося *B*-эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными [2]. Для получения решения уравнения (1) с особенностью в произвольной точке

$(x_0, y_0) \in E_2^+$ применим к функции (21) оператор обобщенного сдвига $T_x^{x_0}$:

$$g(x,y;x_0,y_0) = \frac{\gamma\pi(yy_0)^{-m/4} C_\alpha C_k}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)} \times$$

$$\times\int_0^\pi \left(x^2 + x_0^2 - 2xx_0\cos\varphi + \left(y^{(m+2)/2} - y_0^{(m+2)/2}\right)^2\right)^{-k/2} \times \qquad (22)$$

$$\times\sin^{k-1}\varphi d\varphi + \Phi_4^*(x,y;x_0,y_0),$$

где $\Phi_4^*(x,y;x_0,y_0)$ – регулярная в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция, $\tilde{N}_k^{-1} = \int_0^\pi \sin^{k-1}\varphi d\varphi = \pi^{1/2}\Gamma(k/2)/\Gamma((k+1)/2)$.

Докажем, что интеграл в (22) в точке $M_0(x_0,y_0) \in E_2^+$ имеет логарифмическую особенность. Для этого этот интеграл, как раньше, запишем в виде

$$J = \int_0^\pi \left(x^2 + x_0^2 - 2xx_0 + 2xx_0(1-\cos\varphi) + \right.$$

$$\left. +4/(m+2)^2\left(y^{(m+2)/2} - y_0^{(m+2)/2}\right)^2\right)^{-k/2} \times \qquad (23)$$

$$\times\sin^{k-1}\varphi d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \left(\rho_{MM_0}^2 + 4xx_0\sin^2(\varphi/2)\right)^{-k/2} \sin^{k-1}\varphi d\varphi,$$

где

$$\rho_{MM_0}^2 = (x-x_0)^2 + 4/(m+2)^2\left(y^{(m+2)/2} - y_0^{(m+2)/2}\right)^2.$$

Как раньше, разность $\psi(x,y;x_0,y_0)$ между интегралом (23) и интегралом $\int_0^\pi \varphi^{k-1}\left(\rho_{MM_0}^2 + xx_0\varphi^2\right)^{-k/2} d\varphi$ является регулярной функцией в E_2^+. Отсюда следует, что интеграл J можно представить в виде

$$J = \int_0^\pi \left(\rho_{MM_0}^2 + xx_0\varphi^2\right)^{-k/2} \varphi^{k-1} d\varphi + \qquad (24)$$

$$+\Phi(x,y;x_0,y_0).$$

С помощью замены переменной по формуле $\varphi = (xx_0)^{-1/2}\rho_{MM_0}\tau$ интеграл (24) приводится к виду $J = (xx_0)^{-k/2}\int_0^{\pi(xx_0)^{1/2}/\rho_{MM_0}} \left(1+\tau^2\right)^{-k/2}\tau^{k-1}d\tau +$ $+\Phi(x,y;x_0,y_0)$.

Также последний интеграл можно представить в виде

$$J = (xx_0)^{-k/2}\int_1^{\pi(xx_0)^{1/2}/\rho_{MM_0}} \left(1+\tau^2\right)^{-k/2}\tau^{k-1}d\tau + \qquad (25)$$

$$+\psi(x,y;x_0,y_0),$$

где $\psi(x,y;x_0,y_0)$ – регулярная в E_2^+ функция.

Разлагая подынтегральную функцию в (25) в степенной ряд, получим

$$\tau^{k-1}\left(1+\tau^2\right)^{-k/2} = \tau^{-1}\left(1+1/\tau^2\right)^{-k/2} =$$

$$= \tau^{-1}\left[1 - k/2\cdot\tau^{-2} + \frac{k/2(k/2+1)}{2!}\tau^{-4} - \right.$$

$$\left. -\frac{k/2(k/2+1)(k/2+2)}{3!}\tau^{-6} + \cdots\right] =$$

$$= \tau^{-1} - k/2\cdot\tau^{-3} + \frac{k/2(k/2+1)}{2!}\tau^{-5} -$$

$$-\frac{k/2(k/2+1)(k/2+2)}{3!}\tau^{-7} + \cdots$$

Ясно, что этот ряд сходится равномерно в промежутке $[1;\infty)$. Поэтому его можно интегрировать в этом промежутке почленно. В результате имеем

$$J = (xx_0)^{-k/2}\ln\left(1/\rho_{MM_0}\right) + \psi_2(x,y;x_0,y_0).$$

Отсюда и из (22) следует, что

$$\varepsilon(x,y;x_0,y_0) = \gamma\frac{\pi(xx_0)^{-k/2}(yy_0)^{-m/4}C_\alpha C_k}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)} \times \qquad (26)$$

$$\times\ln\left(1/\rho_{MM_0}\right) + R(x,y;x_0,y_0),$$

где $R(x,x_0;y,y_0)$ – регулярная функция в E_2^+.

Из формулы (12) следует, что при $\rho_{MM_0} \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\varepsilon(x,y;x_0,y_0) = O\left(e^{-\rho_{MM_0}}\right). \qquad (27)$$

Докажем, что при определенном значении постоянной γ функция (26) удовлетворяет равенству (2) и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $M_0(x_0,y_0) \in E_2^+$. Для этого введем формулы Грина для оператора T_B. Обозначим через $C_B^n(D^+)$ множество четных по *x*, *n* раз непрерывно дифференцируемых функций в D^+, а через $C_0^1(D^+)\left(C_0^1(\Gamma^+)\right)$ – множество функций, удовлетворяющих условию $\partial u/\partial y|_{y=0} = 0\left(\partial\varphi/\partial\eta|_{\eta=0} = 0\right)$. Пусть $u,\upsilon \in C_B^2(D^+) \cap C_0^1(D^+)$. Непосредственным вычислением можно доказать, что

$$\upsilon T_B(u)x^k + (y^m \partial\upsilon/\partial x \cdot \partial u/\partial x + \partial\upsilon/\partial y \cdot \partial u/\partial y)x^k =$$
$$= \partial/\partial x(x^k y^m \upsilon\partial u/\partial x) + \partial/\partial y(x^k \upsilon\partial u/\partial y) - \lambda^2 x^k y^m u\upsilon$$

Интегрируя обе части этого тождества по области D^+ и пользуясь формулой Остоградского, получаем

$$\iint_{D^+} \upsilon T_B(u) x^k dxdy +$$
$$+\iint_{D^+} \left(y^m \partial\upsilon/\partial x \cdot \partial u/\partial x + \partial\upsilon/\partial y \cdot \partial u/\partial y\right) x^k dxdy = \quad (28)$$
$$= \int_{\Gamma^+} \upsilon A[u] \xi^k d\Gamma - \lambda^2 \iint_{D^+} \xi^k \eta^m u\upsilon d\xi d\eta,$$

где $A[\ ] = \eta^m \cos(n,\xi)\partial/\partial\xi + \cos(n,\eta)\partial/\partial\eta$ – конормальная производная, n – единичный вектор внешней нормали к границе Γ^+.

Заменяя в формуле (28) местами u и υ, получим

$$\iint_{D^+} u T_B(\upsilon) x^k dxdy +$$
$$+\iint_{D^+} \left(y^m \partial u/\partial x \cdot \partial\upsilon/\partial x + \partial u/\partial y \cdot \partial\upsilon/\partial y\right) x^k dxdy = \quad (29)$$
$$= \int_{\Gamma^+} u A[\upsilon] \xi^k d\Gamma - \lambda^2 \iint_{D^+} \xi^k \eta^m u\upsilon d\xi d\eta$$

Вычитая из (28) формулу (29), получаем

$$\iint_{D^+} [\upsilon T_B(u) - u T_B(\upsilon)] x^k dxdy =$$
$$= \int_{\Gamma^+} (\upsilon A[u] - u A[\upsilon]) \xi^k d\Gamma^+. \quad (30)$$

Формулы (28) и (30) называются соответственно первой и второй формулами Грина для оператора T_B.

Пусть $M_0(x_0,y_0) \in E_2^+$ и $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}_B^+$ такая, что $\varphi(x_0,y_0) \neq 0$. Рассмотрим окружность $C_{M_0\varepsilon}$ с центром в точке M_0 и радиуса ε и четверть круга $K_R^+ \subset E_2^+$ с центром в начале координат и радиуса R. Предполагается, что $C_{M_0\varepsilon} \subset K_R^+ \subset Supp\varphi$. Четверть круга K_R^+ ограничена четвертью окружности C_R^+ и отрезками $[0,R]$ и $[R,0]$ осей координат $x=0$ и $y=0$. Обозначим через $G_{\varepsilon R}^+$ область, ограниченную окружностью $C_{M_0\varepsilon}$ и границей четверти круга K_R^+. Применяя к функциям $\upsilon = \varepsilon(x,y;x_0,y_0)$ и $u(x,y) = \varphi(x,y)$ вторую формулу Грина (30) в области $G_{\varepsilon R}^+$, с учетом того, что $T_B(\varepsilon(x,y;x_0,y_0)) = 0$ в $G_{\varepsilon R}^+$ и $\varphi(x,y) = 0$ вне области $G_{\varepsilon R}^+$, получим

$$\iint_{G_{\varepsilon \hat{E}}^+} \varepsilon(x,y;x_0,y_0) T_B(\varphi) x^k dxdy =$$
$$= -\int_{C_{M_0\varepsilon}} \left(\eta^m \varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0) A[\varphi] -\right.$$
$$\left. -\varphi A\left[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)\right]\right) \xi^k d\Gamma = \quad (31)$$
$$= \int_{C_{M_0\varepsilon}} \varphi(\xi,\eta) A\left[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)\right] \xi^k d\Gamma -$$
$$- \int_{C_{M_0\varepsilon}} \eta^m \varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0) A[\varphi] \xi^k d\Gamma = I_{1\varepsilon} - I_{2\varepsilon}.$$

Нетрудно доказать, что при $\varepsilon \to 0$ $I_{2\varepsilon} \to 0$. Вычислим предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла

$$I_{1\varepsilon} = \int_{C_{M_0\varepsilon}} \varphi(\xi,\eta) A\left[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)\right] \xi^k d\Gamma. \quad (32)$$

Заменяя в (32) $\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)$ на его значение из (26), получим

$$I_{1\varepsilon} = \gamma \frac{\pi x_0^{-k/2} y_0^{-m/4} C_\alpha C_k}{k 2^{\nu+1} \Gamma(1-\nu)} \times$$
$$\times \int_{C_{M_0\varepsilon}} \varphi(\xi,\eta) A\left[\ln\left(1/\rho_{M_0 P}\right)\right] \times \quad (33)$$
$$\times \eta^{-m/2} \xi^{k/2} dC_{M_0\varepsilon} + J_{2\varepsilon}.$$

Также нетрудно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_{2\varepsilon} = 0. \quad (34)$$

Вычислим предел интеграла

$$J_{1\varepsilon} = \gamma \frac{\pi x_0^{-k/2} y_0^{-m/4} C_\alpha C_k}{k 2^{\nu+1} \Gamma(1-\nu)} \times$$
$$\times \int_{C_{M_0\varepsilon}} \varphi(\xi,\eta) A\left[\ln\left(1/\rho_{M_0 P}\right)\right] \eta^{-m/2} \xi^{k/2} dC_{M_0\varepsilon}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Вычисляя конормальную производную $A\left[\ln\left(1/\rho_{M_0 P}\right)\right] = -A\left[\ln \rho_{M_0 P}\right]$ и пользуясь формулой Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)(x - x_0),$$
$$0 < \theta < 1, \quad (35)$$

приведем этот интеграл к виду

$$J_{1\varepsilon} = -\gamma \frac{\pi x_0^{-k/2} y_0^{-m/4} C_\alpha C_k}{k 2^{\nu+1} \Gamma(1-\nu) \varepsilon} \times$$
$$\times \int_{C_{M_0\varepsilon}} \varphi(\xi,\eta) \frac{\eta^m (\xi - x_0)^2 + \left(y_0 + \theta(\eta - y_0)\right)^{m/2} (\eta - y_0)^2 \eta^{m/2}}{(\xi - x_0)^2 + \left(y_0 + \theta(\eta - y_0)\right)^m (\eta - y_0)^2} \times$$
$$\times \xi^{k/2} \eta^{-m/2} dC_{M_0\varepsilon}.$$

Полагая в этом интеграле $\xi = x_0 + \varepsilon\cos\varphi$, $\eta = y_0 + \varepsilon\sin\varphi$ получим

$$J_{1\varepsilon}=-\gamma\frac{\pi x_0^{-k/2}y_0^{-m/4}C_\alpha C_k}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)\varepsilon}\int_0^{2\pi}\varphi(x_0+\varepsilon\cos\varphi,y_0+\varepsilon\sin\varphi)\times$$
$$\times\frac{(y_0+\varepsilon\sin\varphi)^m\varepsilon^2\cos^2\varphi+(y_0+\theta\varepsilon\sin\varphi)^{m/2}\varepsilon^2\sin^2\varphi(y_0+\varepsilon\sin\varphi)^{m/2}}{\varepsilon^2\cos^2\varphi+(y_0+\theta\varepsilon\sin\varphi)^m\varepsilon^2\sin^2\varphi}\times$$
$$\times(x_0+\varepsilon\cos\varphi)^{k/2}(y_0+\varepsilon\sin\varphi)^{-m/4}\varepsilon d\varphi$$

Сокращая на ε^3, получаем

$$J_{1\varepsilon}=-\gamma\frac{\pi x_0^{-k/2}y_0^{-m/4}C_\alpha C_k}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}\int_0^{2\pi}\varphi(x_0+\varepsilon\cos\varphi,y_0+\varepsilon\sin\varphi)\times$$
$$\times\frac{(y_0+\varepsilon\sin\varphi)^m\cos^2\varphi+(y_0+\theta\varepsilon\sin\varphi)^{m/2}\sin^2\varphi(y_0+\varepsilon\sin\varphi)^{m/2}}{\cos^2\varphi+(y_0+\theta\varepsilon\sin\varphi)^m\sin^2\varphi}\times \quad (36)$$
$$\times(x_0+\varepsilon\cos\varphi)^{k/2}(y_0+\varepsilon\sin\varphi)^{-m/4}d\varphi$$

Переходя в (36) к пределу при $\varepsilon\to 0$, имеем

$$J_1=-\gamma\frac{\pi x_0^{-k/2}y_0^{-m/4}C_\alpha C_k\varphi(x_0,y_0)}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\frac{y_0^m\cos^2\varphi+y_0^{m/2}\sin^2\varphi y_0^{m/2}}{\cos^2\varphi+y_0^m\sin^2\varphi}x_0^{k/2}y_0^{-m/4}d\varphi, \quad (37)$$

или

$$J_1=-\gamma\frac{\pi C_\alpha C_k\varphi(x_0,y_0)}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}\int_0^{2\pi}\frac{y_0^{m/2}d\varphi}{\cos^2\varphi+y_0^m\sin^2\varphi}=$$
$$=-2\gamma\frac{\pi\tilde{N}_\alpha\tilde{N}_k\varphi(x_0,y_0)}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{y_0^{m/2}d\varphi}{\cos^2\varphi+y_0^m\sin^2\varphi}+\right.$$
$$\left.+\int_0^{\pi/2}\frac{y_0^{m/2}d\varphi}{\sin^2\varphi+y_0^m\cos^2\varphi}\right]=-2\gamma\frac{\pi\tilde{N}_\alpha\tilde{N}_k\varphi(x_0,y_0)}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}\times$$
$$\times\left[\int_0^{\pi/2}\frac{d\left(y_0^{m/2}tg\varphi\right)}{1+\left(y_0^{m/2}tg\varphi\right)^2}+\int_0^{\pi/2}\frac{d\left(y_0^{m/2}ctg\varphi\right)}{1+\left(y_0^{m/2}ctg\varphi\right)^2}\right]=$$
$$=-2\gamma\frac{\pi\tilde{N}_\alpha\tilde{N}_k\varphi(x_0,y_0)}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}\int_0^\infty dt/(1+t^2)=-2\pi\gamma\frac{C_\alpha C_k\varphi(x_0,y_0)}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}.$$

Требуя, чтобы $2\pi\gamma\dfrac{C_\alpha C_k}{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}=1$ имеем

$$\gamma=\frac{k2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}{2\pi C_\alpha C_k}. \quad (38)$$

Переходя к пределу в (31) при $\varepsilon\to 0$ и $R\to\infty$, с учетом (38), предельных соотношений (34), (37) и финитности функции $\varphi(x,y)$, получаем (2).

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точке $M_0(x_0,y_0)$ при малых значениях ρ_{MM_0} может быть представлено в виде

$$\varepsilon(x,y;x_0,y_0)=(xx_0)^{-k/2}(yy_0)^{-m/4}/2\times$$
$$\times\ln\left(1/\rho_{MM_0}\right)+R(x,y;x_0,y_0), \quad (39)$$

где $R(x,y;x_0,y_0)$ – регулярная функция в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Заменяя в (21) γ на его значение из (38), получаем фундаментальное решение уравнения с особенностью в точке $M_0(0,y_0)$

$$\varepsilon(x,y;0,y_0)=(yy_0)^{-m/4}/2C_k\cdot\rho^{-k}+$$
$$+\Phi_4(x,y;y_0). \quad (40)$$

Также нетрудно доказать, что для фундаментального решения $\varepsilon(x,y;\xi,\eta)$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\partial\varepsilon/\partial y=o(1) \text{ при } y\to 0,$$
$$\partial\varepsilon/\partial\eta=o(1) \text{ при } \eta\to 0. \quad (41)$$

Теперь исследуем поведение фундаментального решения в точках координатной оси O_x $(y=0)$. Для этого применим к функции (13) оператор обобщенного сдвига $T_\xi^{\xi_0}$

$$q(\xi,\eta;\xi_0,0)=\frac{\gamma\pi C_k}{2^{\nu+1}\Gamma(1-\nu)}\times$$
$$\times\int_0^\pi\left(\xi^2+\eta^2+\xi_0^2-2\xi\xi_0\cos\varphi\right)^{-\nu}\sin^{k-1}\varphi d\varphi+ \quad (42)$$
$$+\overline{\psi}(\xi,\eta;\xi_0),$$

где $\overline{\psi}(\xi,\eta;\xi_0)$ – регулярная функция в точке $(\xi_0,0)$, $C_k=\pi^{1/2}\Gamma(k/2)/\Gamma((k+1)/2)$. Как раньше, интеграл из (42) запишем в виде

$$J=\int_0^\pi\left(r_{PP_0}^2+4\xi\xi_0\sin^2(\varphi/2)\right)^{-\nu}\times$$
$$\times\sin^{k-1}\varphi d\varphi+\overline{\psi}(\xi,\eta;\xi_0). \quad (43)$$

Разность $\Phi(\xi,\eta;\xi_0)$ между этим интегралом и интегралом $\int_0^\pi\varphi^{k-1}\left(r_{PP_0}^2+\xi\xi_0\varphi^2\right)^{-\nu}d\varphi$ является регулярной функцией от ξ,η, в точке $P_0(\xi_0,0)$ (т.е. для $r_{PP_0}=0$). Так что интеграл J можно представить в виде

$$J=\int_0^\pi\left(r_{PP_0}^2+\xi\xi_0\varphi^2\right)^{-\nu}\varphi^{k-1}d\varphi+\Phi(\xi,\eta;\xi_0).$$

Производя в этом интеграле замену переменной по формуле $\varphi=r_{PP_0}(\xi\xi_0)^{-1/2}\tau$, получим

$$J=r_{PP_0}^{-\alpha}(\xi\xi_0)^{-k/2}\int_0^{\pi(\xi\xi_0)^{1/2}/r_{PP_0}}\left(1+\tau^2\right)^{-\nu}\tau^{k-1}d\tau+\overline{\Phi}(\xi,\eta;\xi_0).$$

Этот интеграл при малых значениях r_{PP_0} также можно представить в виде

$$J=r_{PP_0}^{-\alpha}(\xi\xi_0)^{-\kappa/2}\int_1^{\pi(\xi\xi_0)^{1/2}/r_{PP_0}}\left(1+\tau^2\right)^{-\nu}\tau^{k-1}d\tau+\overline{\Phi_1}(\xi,\eta;\xi_0).$$

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд, получим

$$\tau^{k+1}\left(1+\tau^2\right)^{-\nu}=\tau^{-(\alpha+1)}-\left(k+\alpha\right)/2\cdot\tau^{-(\alpha+3)}+$$
$$+\frac{\left(k+\alpha\right)/2\left(\left(k+\alpha\right)/2+1\right)}{2!}\tau^{-(k+5)}-\cdots$$

Нетрудно проверить, что этот ряд сходится равномерно в $\left[1,\infty\right)$. Интегрируя его почленно, имеем

$$J=r_{PP_0}^{-\alpha}\left(\xi\xi_0\right)^{-\kappa/2}\int\limits_0^{\pi\left(\xi\xi_0\right)^{1/2}/r_{PP_0}}\left(\tau^{-(\alpha+1)}-\left(k+\alpha\right)/2\cdot\tau^{-(\alpha+3)}+\cdots\right)d\tau$$
$$+\overline{\Phi}\left(\xi,\eta;\xi_0\right)=1/\alpha\cdot r_{PP_0}^{-\alpha}\left(\xi\xi_0\right)^{-k/2}+\overline{\overline{\Phi}}\left(\xi,\eta;\xi_0\right).$$

В результате имеем

$$J=\left(\xi\xi_0\right)^{-k/2}/\alpha\cdot r_{PP_0}^{-\alpha}+\overline{\overline{\Phi}}\left(\xi,\eta;\xi_0\right), \qquad (44)$$

где $r_{PP_0}=\left(\left(\xi-\xi_0\right)^2+\eta^2\right)^{1/2}$ – расстояние между точками $P\left(\xi,\eta\right)$ и $P_0\left(\xi_0,0\right)$, $\overline{\overline{\Phi}}\left(\xi,\eta;\xi_0\right)$ – регулярная в точке $P_0\left(\xi_0,0\right)$ функция. Отсюда и из (42) следует, что решение $q\left(\xi,\eta;\xi_0,0\right)$ уравнения (4) в E_2^+ в точках координатной оси $\eta=0$ может быть представлено в виде

$$g\left(\xi,\eta;\xi_0,0\right)=\gamma\frac{\pi\left(\xi\xi_0\right)^{-k/2}C_k}{\alpha 2^{\nu+1}\Gamma\left(1-\nu\right)}r_{PP_0}^{-\alpha}+$$
$$+\Phi\left(\xi,\eta;\xi_0\right). \qquad (45)$$

Возвращаясь в (45) к переменным x и y, с учетом формул (3), получаем фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точках координатной оси $y=0$

$$\varepsilon\left(x,y;x_0,0\right)=\gamma\frac{\pi\left(xx_0\right)^{-k/2}C_k}{\alpha 2^{\nu+1}\Gamma\left(1-\nu\right)}\rho^{-\alpha}+$$
$$+\overline{\Phi}\left(x,y;x_0\right). \qquad (46)$$

Отсюда следует, что фундаментальное решение (46) уравнения (1) имеет в точках координатной оси $y=0$ степенную особенность вида $\rho^{-\alpha}$. Заменяя в (46) γ на его значение из (38), получаем

$$\varepsilon\left(x,y;x_0,0\right)=k\left(xx_0\right)^{-k/2}/2\alpha C_\alpha\cdot\rho^{-\alpha}+$$
$$+\overline{\Phi}\left(x,y;x_0\right). \qquad (47)$$

* * * * * * * * * *

1. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. – М.: Иностран. лит., 1949. – Ч.1. – 798 с.
2. *Киприянов И.А.* О краевых задача для уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя. – Докл. АН СССР, 1964. – 158. – №2. – С.275-278.

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE DEGENERATING THE B-ELLIPTIC EQUATION WITH NEGATIVE PARAMETER

F.G.Muhlisov, L.F.Galyautdinova

In this work the fundamental solution of the degenerating the B-elliptic equation with negative parameter is under construction, and its elementary properties are studied.

Key words: mathematical physics, differential equation, boundary-value problem, fundamental decision.

* * * * * * * * * *

Мухлисов Фоат Габдуллович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: Lilochka.GF@yandex.ru

Галяутдинова Лилия Фаритовна – аспирант кафедры математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

E-mail: Lilochka.GF@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.01.2011